7.1.187. Доказать частный случай (при $n = 2$) формулы Лейбница для второй производной произведения: если $u(x)$ и $v(x)$ имеют вторые производные, то

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

7.1.188. Верно ли, что если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ — не имеет, то функция $f(x)g(x)$ также не имеет производной в точке x_0?

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Понятие дифференциала

⇛ Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует такое число A, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{2.1}$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т. е. $A \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом функции* в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Нетрудно показать (положив $y = x$ в формуле (2.1)), что $dx = \Delta x$.

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$; при этом $A = f'(x_0)$. Поэтому $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$, или, если $f'(x)$ существует на данном интервале $(a; b)$, то

$$dy = f'(x)\,dx, \quad x \in (a; b).$$

Отсюда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, т. е. производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

Если приращение Δx аргумента x близко к нулю (т. е. достаточно мало), то приращение Δy функции приближенно равно ее дифференциалу, т. е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{df(x_0)}.$$

Последняя формула удобна для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ по известному значению этой функции и ее производной в точке x_0.

Геометрический смысл и свойства дифференциала

Геометрически (рис. 82) приращение Δy функции $f(x)$ в точке x — есть приращение ординаты точки на кривой ($\Delta y = AC$), а дифференциал dy функции в этой точке — приращение ординаты соответствующей точки на касательной ($dy = AB$).

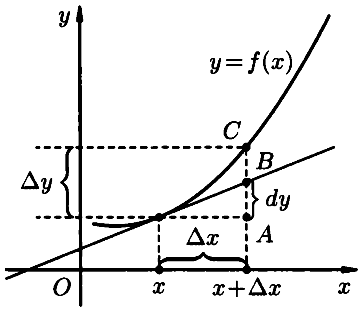

Рис. 82

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые функции, дифференцируемые в точке x. Тогда:

1. $dC = 0$, где C — константа.
2. $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$, где α — константа.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(u \cdot v) = udv + vdu$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$.
6. *Инвариантность формы дифференциала.* Если $y = f(u(x))$ — сложная функция, то

$$df(u) = f'(u)\,du, \quad \text{или} \quad dy = y'_u \cdot du,$$

т. е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается y как функция независимой переменной x или зависимой переменной u.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда, как известно, в каждой точке этого интервала определен дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ функции $f(x)$, называемый также *дифференциалом первого порядка* (или первым дифференциалом).

⇛ *Дифференциалом второго порядка* (или вторым дифференциалом) от функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$ в этой точке.

Дифференциал второго порядка обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Таким образом, $d^2y = d(dy)$. Учитывая, что $dy = f'(x)\,dx$, где dx — не зависящая от x константа, получим

$$d^2y = f''(x)(dx)^2, \text{ или, более кратко, } d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков: $d^3y = d(d^2y)$, $d^4y = d(d^3y), \ldots$ В общем случае, *дифференциалом n-го порядка* от функции $f(x)$ в точке x называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $f(x)$ в этой точке:

$$d^ny = d(d^{n-1}y),$$

т. е. $d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$, или, более кратко, $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$. Отсюда следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}, \text{ в частности } f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Заметим, что для дифференциалов высших порядков свойство инвариантности (как для дифференциалов первого порядка) не имеет места.

7.2.1. Найти дифференциал функции

$$y = e^{x^3}.$$

○ Так как $dy = y'dx$, то в данном случае $dy = \left(e^{x^3}\right)' dx = 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$. ●

Найти дифференциал функции:

7.2.2. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

7.2.3. $y = (x^3 - x)\operatorname{tg} x$.

7.2.4. $y = x^2 \ln x$.

7.2.5. $y = \dfrac{x-2}{x^2+1}$.

7.2.6. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 - 3x + 1$ в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$.

○ Сначала найдем приращение Δy в общем виде:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x+\Delta x) - y(x) = \\ &= \left[(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1\right] - (x^2 - 3x + 1) = \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 = \\ &= 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x-3)\Delta x + (\Delta x)^2.\end{aligned}$$

Из полученного выражения для приращения Δy видно, что его линейная часть в произвольной точке x_0 равна $(2x_0 - 3)\Delta x$. Тогда по определению дифференциал данной функции будет равен $dy = (2x-3)\Delta x$, или, в более привычной записи, $dy = (2x-3)dx$.

Второе слагаемое в полученной записи для Δy, т.е. $(\Delta x)^2$, есть бесконечно малая более высокого порядка, чем первое слагаемое.

Заметим, что можно найти dy и сразу (без вычисления Δy) по формуле $dy = y'dx$, откуда $dy=(x^2-3x+1)'dx=(2x-3)dx$.

Теперь найдем Δy и dy в точке $x_0 = 2$, если $\Delta x = 0{,}1$:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 - 3) \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}11, \quad dy = 0{,}1. \quad \bullet$$

Найти приращение и дифференциал функции $y = y(x)$ в общем виде, а также в точке x_0, если известно Δx:

7.2.7. $y = x^3 + 2x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$.

7.2.8. $y = x^2 + x - 5$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}5$.

7.2.9. Вычислить приближенно:

1) $\ln 1{,}02$;

2) $\sqrt{24}$.

❍ 1) Воспользуемся приближенной формулой

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Тогда, подставляя $f(x) = \ln x$, получим

$$\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x.$$

Полагая здесь $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, найдем

$$\ln 1{,}02 \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0{,}02 = 0{,}02.$$

Таким образом, $\ln 1{,}02 \approx 0{,}02$.

2) Учитывая, что $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 25$, $\Delta x = -1$, получим

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x, \quad \text{т. е.}$$

$$\sqrt{24} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot (-1) = 4{,}9.$$

Окончательно $\sqrt{24} \approx 4{,}9$. ●

Вычислить приближенно:

7.2.10. $\sqrt[3]{26}$.

7.2.11. $\operatorname{tg} 44^\circ$.

7.2.12. $(1{,}02)^5$.

7.2.13. Найти dy, d^2y и d^3y для функции $y = \sqrt[3]{x}$.

❍ Поскольку

$$dy = y'dx = (\sqrt[3]{x})'dx = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

то

$$d^2y = d(dy) = d\Big(\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}\Big) = \Big(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Big)'(dx)^2 =$$

$$= \frac{1}{3}(x^{-2/3})'dx = -\frac{2}{9}x^{-5/3}dx^2 = -\frac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

Отсюда

$$d^3y = d(d^2y) = d\Big(-\frac{2}{9}\frac{dx^2}{x^{5/3}}\Big) = -\frac{2}{9}(x^{-5/3})'\,dx^3 =$$

$$= \frac{10}{27}x^{-8/3}dx^3 = \frac{10dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}}.$$

То же самое можно найти иначе, предварительно отыскав производные y', y'' и y''', а затем воспользоваться формулами: $d^2y = y''dx^2$, $d^3y = y'''dx^3$. ●

Найти dy и d^2y:

7.2.14. $y = (x^2+1)^3$.

7.2.15. $y = \sin^2 x$.

Дополнительные задачи

Найти дифференциалы функций:

7.2.16. $y = 2^{\cos x}$.

7.2.17. $y = \ln^3 \sin x$.

7.2.18. $f(x) = \sqrt[3]{x^5-1}$.

7.2.19. $S(t) = \frac{\sqrt{t}}{t-1}$.

Найти приращение и дифференциал функции y в общем виде, а также в точке x_0, если известно Δx:

7.2.20. $y = 4x^2+1$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$.

7.2.21. $y = |x|$, $x_0 = 10$, $\Delta x = -0{,}1$.

Вычислить приближенно:

7.2.22. $\sin 29°$.

7.2.23. $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

7.2.24. $(0{,}99)^4$.

Найти dy и d^2y:

7.2.25. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

7.2.26. $y = x(\ln x - 1)$.

7.2.27. Найти dy, d^2y и d^3y, где $y = x^n$.