7.3.85. С точностью до 0,0001 вычислить $\sin 1°$, используя формулу Маклорена.

7.3.86. С точностью до 0,001 вычислить $\ln 1{,}3$, используя формулу Маклорена.

Используя формулу Маклорена, вычислить пределы:

7.3.87. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

7.3.88. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$.

7.3.89. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

7.3.90. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \cdot \sin x}$.

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Условия монотонности функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$[1] и для любого x из интервала $(a; b)$ выполнено неравенство $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) то $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на этом интервале.

Условие же $\forall x \in (a; b)$: $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) равносильно тому, что функция $f(x)$ не убывает (соответственно, не возрастает) на интервале $(a; b)$, т. е. $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Экстремумы функции

⇒ Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*локального минимума*), если существует такая окрестность $U(x_0)$ этой окрестности, что

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in U(x_0),\ x \neq x_0$$

(соответственно, $f(x) \geqslant f(x_0)$, $\forall x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$).

⇒ Точки локального максимума и минимума называются *точками локального экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами* функции.

Теорема 7.4 (Ферма — необходимое условие экстремума). Если x_0 — точка локального экстремума для функции $f(x)$, то в этой точке производная функции либо равна нулю ($f'(x_0) = 0$), либо не существует.

[1] В том числе возможны случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$.

⇛ Точки области определения непрерывной функции $f(x)$, в которых ее производная не существует или равна нулю, называются *критическими точками* функции.

В силу теоремы Ферма экстремумы функции находятся среди ее критических точек.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка локального экстремума (если с «+» на «−» — локальный максимум, если же с «−» на «+» — локальный минимум).

Второе достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные первого и второго порядков. Тогда, если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка локального экстремума. В частности, если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума, а если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — критические точки непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, то наибольшее и наименьшее значения этой функции есть соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n)$, $f(b)$.

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

⇛ Функция $f(x)$, определенная на интервале $(a; b)$, называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) на этом интервале, если точки любой дуги графика функции расположены выше (соответственно, ниже) хорды, стягивающей эту дугу (рис. 83,*а* и *б*).

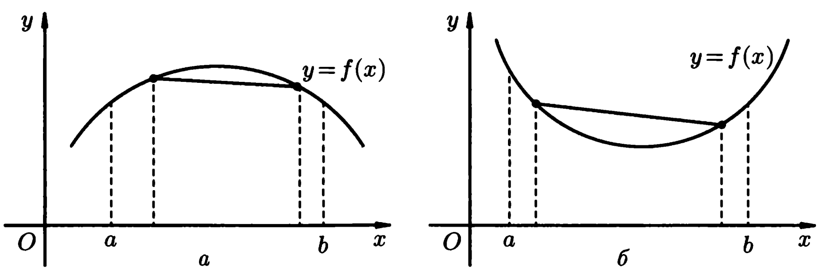

Рис. 83

Иногда выпуклость вверх (соответственно, выпуклость вниз) называют просто *выпуклостью* (соответственно, *вогнутостью*).

График выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале $(a; b)$ функции также называют выпуклым вверх (соответственно, выпуклым вниз).

Можно дать другое, эквивалентное, определение выпуклости вверх (выпуклости вниз): функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале $(a; b)$, если график этой функции при $x \in (a; b)$ расположен ниже (соответственно, выше) касательной, проведенной в любой его точке (рис. 84,*а* и *б*).

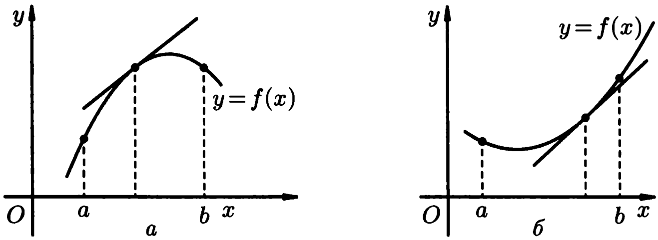

Рис. 84

Достаточное условие выпуклости вверх (вниз). Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале $(a; b)$. Тогда, если $f''(x) \leqslant 0$ (соответственно, $f''(x) \geqslant 0$) на этом интервале, то функция $f(x)$ выпукла вверх (соответственно, выпукла вниз) на нем.

$\Rrightarrow$ Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если при переходе через точку x_0 функция меняет направление выпуклости, то эта точка называется *точкой перегиба функции* $f(x)$. Точка $(x_0, f(x_0))$ при этом называется *точкой перегиба графика функции* $f(x)$ (рис. 85,*а* и *б*).

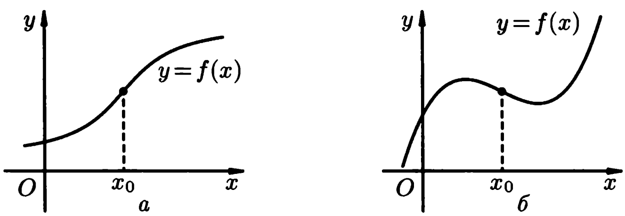

Рис. 85

Необходимое условие точки перегиба. Если x_0 — точка перегиба функции $f(x)$, то в этой точке вторая производная функция либо равна нулю ($f''(x_0) = 0$), либо не существует.

$\Rrightarrow$ Точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими точками 2-го рода.*

Точки перегиба следует искать среди критических точек 2-го рода.

Первое достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет вторую производную в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0). Тогда если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 — точка перегиба.

Второе достаточное условие точки перегиба. Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до третьего порядка включительно. Тогда если $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка перегиба этой функции.

Асимптоты

Прямая линия m называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние d от точки M, лежащей на этом графике, до прямой m стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат в бесконечность (рис. 86 а), б), в))[2].

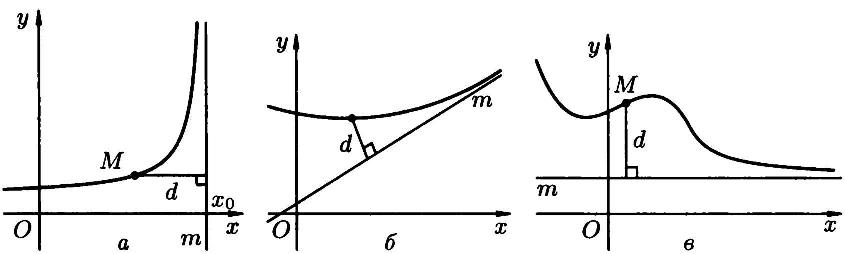

Рис. 86

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

⇛ Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ равен бесконечности (рис. 86 а)).

⇛ Прямая $y = kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - (kx+b)\big) = 0$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) - (kx+b)\big) = 0$) (рис. 86 б)).

Прямая $y = kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b$$

[2]Приведенное здесь наглядное описание асимптоты не является, вообще говоря, строгим математическим определением.

(соответственно,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b).$$

Частным случаем наклонной асимптоты (при $k=0$) является *горизонтальная асимптота* (рис. 86 в)).

Прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$$

(соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$).

Построение графиков функций

При построении графика данной функции целесообразно пользоваться следующей схемой:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность;

3) найти участки непрерывности функции, а так же точки разрыва с указанием вида разрыва;

4) найти точки пересечения графика с осями координат;

5) найти интервалы знакопостоянства функции;

6) найти асимптоты;

7) найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции;

8) найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

7.4.1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=$ $=x^3-6x^2+5$.

◔ Функция определена на всей числовой оси, а ее производная равна $f'(x)=3x^2-12x=3(x-2)(x+2)$. Функция $f(x)$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x))>0$, т.е. $(x-2)(x+2)>0$, откуда $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. Аналогично, данная функция убывает в точности когда $f'(x)<0$, т.е. $(x-2)(x+2)<0$, откуда $x\in(-2;2)$.

Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$, а убывает на интервале $(-2;2)$. ●

Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$:

7.4.2. $f(x)=(x-2)^2\cdot(x+2)$.

7.4.3. $f(x)=\ln(x^2-2x+4)$.

7.4.4. Найти экстремумы функции $f(x)=x^3-9x^2+15x$.

◔ Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, причем $f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$. Критические точки $x_1=1$, $x_2=5$. Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума, для чего найдем $f''(1)$ и $f''(5)$:

$$f''(x) = 6x - 18 \Longrightarrow f''(1) = -12,\ f''(5) = 12.$$

Поскольку $f'(1) = 0$, а $f''(1) < 0$, то $x = 1$ — точка локального максимума, причем $f(1) = 7$. Аналогично, так как $f'(5) = 0$, а $f''(5) > 0$, то $x = 5$ — точка локального минимума, а $f(5) = -25$. ●

Найти экстремумы функций

7.4.5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

7.4.6. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

7.4.7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

❍ Функция определена и дважды дифференцируема на всей действительной оси. Находим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{6\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}{(x^2+1)^3}.$$

Отсюда получим: функция выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f'' < 0$, т.е. $x^2 - \dfrac{1}{3} < 0$, или $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Функция выпукла вниз тогда и только тогда, когда $x^2 - \dfrac{1}{3} > 0$, т.е. $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

Таким образом, функция выпукла вверх на $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, выпукла вниз на $\left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и на $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. Откуда ясно, что точки $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ являются точками перегиба данной функции. ●

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций

7.4.8. $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$.

7.4.9. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 6x - 9$.

7.4.10. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

❍ Функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 1$, в которой она терпит разрыв второго рода, причем $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$. Отсюда следует, что прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота и других вертикальных асимптот нет.

Проверим, есть ли у графика функции наклонные асимптоты. Находим

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \text{ откуда}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = x$ — наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$. Аналогично получим, что эта прямая является наклонной асимптотой и при $x \to -\infty$.

Поскольку угловой коэффициент k наклонной асимптоты не равен нулю, то график функции не имеет горизонтальных асимптот. ●

Найти асимптоты графика функции $f(x)$:

7.4.11. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-9}$.

7.4.12. $f(x) = x \cdot e^x$.

7.4.13. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

◐ Область определения $D(f)$ функции — вся числовая ось, за исключением точек $x = -2$ и $x = 2$, т. е.

$$D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$$

Функция непериодическая; исследуем ее на четность и нечетность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x).$$

Следовательно, данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому далее исследуем функцию только при $x \geqslant 0$.

Найдем точки пересечения графика с осями координат: с осью Oy график пересекается при $x = 0$, откуда

$$y = f(0) = 0,$$

т. е. $M(0;0)$ — точка пересечения с осью Oy;

с осью Ox график пересекается, если $f(x) = 0$, т. е. $\dfrac{x^3}{4-x^2} = 0$, откуда $x = 0$. Таким образом, $M(0;0)$ — единственная точка пересечения графика с осями координат.

Находим интервалы знакопостоянства функции:

$$f(x) > 0 \iff \frac{x^3}{4-x^2} > 0 \iff x(4-x^2) > 0,$$

и так как мы рассматриваем только случай $x \geqslant 0$, то получаем $0 < x < 2$.

Аналогично $f(x) < 0$ при $x > 2$.

Далее,

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 2+0} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty,$$

т. е. прямая $x = 2$ — вертикальная асимптота. Отсюда, в силу симметрии, следует, что прямая $x = -2$ — также вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0,$$

т. е. прямая $y = -x$ — наклонная асимптота при $x \to +\infty$ (то же и при $x \to -\infty$). Горизонтальных асимптот график не имеет.

Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4-x^2}\right)' = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)}{(4-x^2)^2}.$$

Отсюда видно, что при $x \geqslant 0$ (см. рис. 87) функция имеет максимум в точке $x = 2\sqrt{3}$ (причем $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} \approx -5{,}2$), возрастает на $(0; 2)$ и $(2; 2\sqrt{3})$ и убывает на $(2\sqrt{3}; +\infty)$.

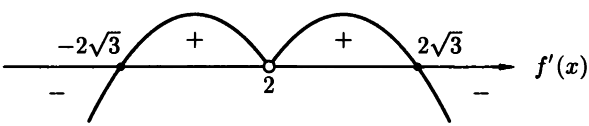

Рис. 87

Чтобы определить интервалы выпуклости и точки перегиба, вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}.$$

Отсюда ясно, что при $x \geqslant 0$ функция выпукла вверх (т. е. $f'' < 0$) на $(2; +\infty)$ и выпукла вниз (т. е. $f'' > 0$) на $(0; 2)$, $x = 0$ — точка перегиба.

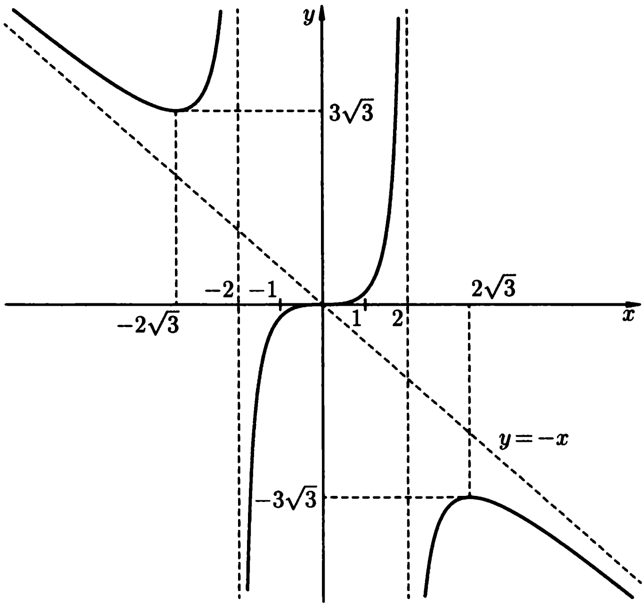

Рис. 88

Учитывая накопленную информацию, строим график функции при $x \geqslant 0$, а затем симметрично отражаем его относительно начала координат (рис. 88). ●

Провести полное исследование и построить графики функций:

7.4.14. $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$. **7.4.15.** $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Дополнительные задачи

Найти интервалы возрастания и убывания функций:

7.4.16. $f(x) = x + e^{-x}$. **7.4.17.** $f(x) = x \ln x$.

7.4.18. $y = \frac{1}{1-x^2}$. **7.4.19.** $S(t) = t + \cos t$.

Найти экстремумы функций:

7.4.20. $f(x) = x^3 - 3x + 1$. **7.4.21.** $y = e^{x^2-4x+5}$.

7.4.22. $y = x - \operatorname{arctg} x$. **7.4.23.** $r = \sqrt{5-2\varphi} + \varphi$.

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

7.4.24. $f(x) = e^{-x^2}$.

7.4.25. $y = x^5 - 10x^2 + 7x - 9$.

7.4.26. $y = \cos x$.

7.4.27. $x = t \cdot \operatorname{arctg} t$.

7.4.28. При каком значении α функция $y = x^4 + \alpha \ln x$ имеет единственную точку перегиба при $x = 1$?

Найти асимптоты графиков функций:

7.4.29. $y = \dfrac{3x}{x+2}$.

7.4.30. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

7.4.31. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x - 6}$.

7.4.32. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

Провести полное исследование и построить графики функций:

7.4.33. $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.

7.4.34. $y = \ln(1 - x^2)$.

7.4.35. $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

7.4.36. $y = x^3 - 4x^2 + 3x$.

7.4.37. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

7.4.38. $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

7.4.39. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

7.4.40. $y = \dfrac{3x-2}{5x^2}$.

7.4.41. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

7.4.42. $y = x - \ln x$.

Более сложные задачи

7.4.43. Привести пример дифференцируемой функции, имеющей экстремумы только в точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7.4.44. Доказать, что точка перегиба функции не может быть одновременно ее точкой экстремума.

7.4.45. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени n $(n \geqslant 3)$ имеет по крайней мере одну точку перегиба.

7.4.46. Доказать, что всякий четный многочлен с положительными коэффициентами не имеет точек перегиба, но имеет единственную точку минимума.

7.4.47. Показать, что критическая точка 2-го рода не обязательно является точкой перегиба функции.

7.4.48. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема и выпукла вверх (выпукла вниз) на интервале $(a; b)$. Доказать, что функция $f'(x)$ строго убывает (соответственно, возрастает) на этом интервале.