# 1. КОМПЛЕСНЫЕ ЧИСЛА В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМАХ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

1. *Основные понятия.*

**Определение.** *Комплексным*[*] *числом* $z$ называется выражение вида

$$x + yi,$$

где $x$, $y$ – действительные числа ($x \in R$, $y \in R$); $i$ – число, квадрат которого равен минус единице ($i^2 = -1$); число $i = \sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей*.

Число $x$ называется *действительной частью* комплексного числа $z$, обозначается $x = \operatorname{Re} z$; $y$ называется *мнимой частью* комплексного числа $z$ и обозначается $y = \operatorname{Im} z$. Выражение $z = x + yi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа. *Множество комплексных чисел* обозначается $C$, а $z \in C$ – элемент множества. Очевидно, что $R \subset C$.

*ПРИМЕР.* Нахождение действительной и мнимой частей комплексных чисел. Записать действительную и мнимую части чисел:

$$z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = -3i, \quad z_3 = i - 2, \quad z_4 = 5.$$

Решение. Имеем $\operatorname{Re} z_1 = 1, \operatorname{Im} z_1 = -2$. Далее $z_2 = 0 - 3i$, $\operatorname{Re} z_2 = 0, \quad \operatorname{Im} z_2 = -3$. Число $z_3 = i - 2$ следует записать в стандартном виде $z_3 = -2 + i$; тогда $\operatorname{Re} z_3 = -2, \operatorname{Im} z_3 = 1$. Наконец $z_4 = 5 + 0i$, т.е. $\operatorname{Re} z_4 = 5, \ \operatorname{Im} z_4 = 0$.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

---

[*] Название «комплексное» происходит от слова «составное»: по виду выражения x + yi.

Задание комплексного числа $z$ можно рассматривать как задание точки на плоскости, абсциссой которой является $x = \operatorname{Re} z$, ординатой $y = \operatorname{Im} z$, т.е. числу $z = x + yi$ соответствует точка $(x, y)$. Между множеством точек XOY и множеством комплексных чисел (множество C), таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Плоскость XOY при этом называется комплексной плоскостью.

Числа вида $z = x + yi$ и $\bar{z} = x - yi$ называются сопряженными.

2. Арифметические операции над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

1) Суммой (разностью) комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется число $z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

При сложении (вычитании) комплексных чисел складываются (вычитаются) действительные и мнимые части соответственно**.**

2) *Умножение на постоянное число*: $\lambda z = \lambda x + \lambda y i$. Заметим, что $z_1 - z_2 = z_1 + (-1) z_2$.

3) *Произведением* двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i.$$

Комплексные числа перемножаются как двучлены, при этом учитывается, что $i^2 = -1$. В частности, имеем $z^2 = z\,z = (x^2 - y^2) + 2xyi$.

4) *Частным* от деления числа $z_1$ на $z_2$ ($z_2 \neq 0$) называется число $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, такое, что справедливо равенство $z_1 = z\,z_2$.

Чтобы разделить число $z_1$ на $z_2$ ($z_2 \neq 0$), следует числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ умножить на число $\bar{z}_2$, сопряженное знаменателю.

*Пример. алгебраические действия с комплексными числами.*

Вычислить $\dfrac{2i}{1-i}$.

*Решение*. Имеем: $\dfrac{2i}{1-i} = \dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i + 2i^2}{1 - i^2} = \dfrac{-2 + 2i}{2} = -1 + i.$

3. *Тригонометрическая форма комплексного числа.*

Если $x$ и $y$ – декартовы координаты точки плоскости, то, перейдя на плоскости к полярным координатам $(\rho, \varphi)$ (рис. 1.1), получим *тригонометрическую форму* записи комплексного числа:

$$z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi). \tag{1.1}$$

Связь полярных и декартовых координат точки $z$ может быть также представлена в виде

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.2}$$

Число $\rho$ – длина радиуса-вектора точки $(x, y)$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$. Обозначение: $|z| = \rho$.

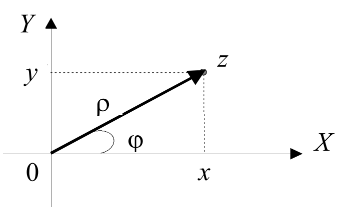


**Рис. 1.1**

Учитывая соотношения (1.2) получаем формулу для нахождения модуля числа $z = x + iy$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.3}$$

Угол $\varphi$ поворота оси $OX$ до совмещения с вектором $OZ$ называется *аргументом* комплексного числа $z$ и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Заметим, что $\operatorname{Arg} z$ определяется неоднозначно, с точностью до $2\pi k$, $k \in Z$:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Если $-\pi < \arg z \le \pi$, то $\varphi = \arg z$ называется *главным значением аргумента*.

При решении задач для вычисления аргумента рекомендуется пользоваться формулой (1.4).

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x),\ x > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi,\ x < 0, y > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi,\ x < 0, y < 0; \\ \pi/2,\ x = 0, y > 0; \\ -\pi/2,\ x = 0, y < 0; \\ 0, \text{если } x > 0, y = 0; \\ \pi, \text{если } x < 0, y = 0; \\ \text{не определен, если } x = 0,\ y = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

*Пример. приведение к тригонометрической форме комплексного числа*. Записать в тригонометрической форме числа а) $z = -\sqrt{3} - i$; б) $z = 3i$.

*Решение*. а) Находим по формуле (1.3) модуль $\rho = |z| = \ = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$. Так как $x = -\sqrt{3} < 0$, $y = -1 < 0$, т.е. точка расположена в третьей четверти, то по (1.4) получаем $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \ = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$. Записываем $z$ в тригонометрической форме (см. соотношение (1.1)), учитывая, что $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$: $z = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

б) Находим модуль $|z| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$. Для числа $z = 3i$ имеем $x = 0$, $y = 3 > 0$ (точка расположена на оси $OY$), тогда по формуле (1.4) $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Получаем тригонометрическую форму

$$z = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1**. Изобразить данные и сопряженные к ним числа точками плоскости
а) $1 + i$; б) $-2 - 3i$; в) $5$; г) $-1 + 2i$; д) $-4i$.

2. Вычислить

а) $(2 + i)(-4 + 3i) + \operatorname{Im}(5 - i)$; б) $\frac{3 + 4i}{i} + \frac{5i}{2 + i}$; в) $\frac{37i}{6 - i} - i|-3 + 4i|$;

г) $i\operatorname{Re}(2 + 3i)^2 - \frac{1}{2i}$; д) $(2i(2 - i))^2$; е) $\left[\frac{4 + i}{i^3} - \operatorname{Im}(i(3 - 4i))\right]^2$.

3. Доказать равенства

а) $\frac{6 - i}{3 + 4i} = \frac{13 + 41i}{-25 + 25i}$; б) $\operatorname{Re}\left(\frac{9 - 7i}{2 - 3i}\right) = 3$;) в) $|\bar{z} + z|^2 + |\bar{z} - z|^2 = 4|z|^2$.

4. Что можно сказать о двух комплексных числах, если их сумма и разность одновременно представляют собой: а) действительные числа; б) чисто мнимые числа?

5. При каком действительном значении $a$ выражение $3i^3 - 2ai^2 + (1 - a)i + 5$ будет числом: а) действительным; б) чисто мнимым; в) равным нулю?

6. Найти комплексное число $z$ из уравнения $(2 - 3i)z = -1 - 5i$.

7. Найти модуль и аргумент (главное значение) комплексных чисел

$$z_1 = 1 - 3i,\ z_2 = 1 + \sqrt{2}i,\ z_3 = \left(1 + \sqrt{2}\right)i,\ z_4 = 1 - \sqrt{2}.$$

**8. НАЙТИ $|\bar{z}|$ И $\arg\bar{z}$, ЕСЛИ** $z = \dfrac{\bar{z}_1}{z_2}$, $z_1 = i,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

9. Записать в тригонометрической форме числа

$$z_1 = -2i,\ z_2 = 5,\ z_3 = \sqrt{3} - i,\ z_4 = \frac{-1+i}{2}.$$

## 2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1. *Возведение в натуральную степень.*
Если $z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для любого натурального числа $n$ имеет место формула:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots . \qquad (2.1)$$

Другими словами, при возведении в степень $n \in N$ – модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на $n$.

***Пример.*** *Вычисление* $w = z^n$. Вычислить $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{12}$.

*Решение.* Найдем модуль и аргумент числа $z = -1 + i\sqrt{3}$. Имеем $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Поскольку точка $z$ расположена во 2-й четверти, то $\varphi = \arg z = \pi + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$. Следовательно, в тригонометрической форме $z = 2\cdot\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Теперь согласно формуле (2.1) получаем:

$$z^{12} = 2^{12}\cdot\left(\cos 12\frac{2\pi}{3} + \sin 12\frac{2\pi}{3}\right) = 4096\cdot(\cos 8\pi + i\sin 8\pi) = 4096.$$

В алгебраической форме $z^{12} = 4096$.

2. **Определение.** *Корнем n-й степени* из комплексного числа $z$ называется число $w = \sqrt[n]{z}$ такое, что $w^n = z$.

Для любого комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$ существует ровно $n$ различных значений корня, которые имеют вид

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \qquad (2.2)$$

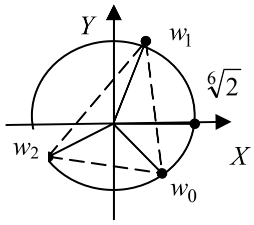


**РИС.**

Функция $w = \sqrt[n]{z}$ является многозначной – каждому значению аргумента отвечает $n$ различных значений корня.

***Пример.*** *Вычисление корня n-й степени из комплексного числа.* Вычислить и изобразить на комплексной плоскости значения $w = \sqrt[3]{-1-i}$.

*Решение.* Для $z = -1 - i$ имеем $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Точка $z$ расположена в 3-й четверти: $\varphi = \arg z = -\pi + \mathrm{arctg}1 = -\pi + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Тогда по формуле (2.2) имеем

$$w_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right)\right), \ k = 0,\ 1,\ 2.$$

Следовательно, $w_0 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$,

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right), \quad w_2 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

Изобразим результаты на комплексной плоскости (рис. 2.1).

3. По определению для всякого $y \in R$ полагаем $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Тогда, если $z = x + yi$, то значение функции $w = e^z$ вычисляется по формуле $w = e^z = e^x e^{iy}$ или

$$w = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (2.3)$$

Последнее представление можно понимать как тригонометрическую форму записи $w$.

***Пример.*** *Вычисление значения функции* $w = e^z$. Вычислить $e^{1 - i\frac{\pi}{4}}$.
*Решение*. Используя формулу (2.3) получаем

$$e^{1-i\frac{\pi}{4}} = e\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{e\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

4. *Тригонометрические функции*. Функции $w = \cos z$ и $w = \sin z$ определяют в виде

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (2.4)$$

Тангенс и котангенс комплексного переменного определяем по формулам

$$\text{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \ \text{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

во всех точках $z$, где знаменатель соответствующей дроби не обращается в ноль.

***Пример.*** *Вычисление значений тригонометрических функций.* Вычислить значение $w = \sin\frac{\pi i}{2}$.

*Решение.* Согласно (2.4) имеем

$$w = \sin\frac{\pi i}{2} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{2i} = -i\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

5. *Гиперболические синус* и *косинус* определяются по формулам

$$\text{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \ \text{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Имеют место соотношения:

$$\text{ch} z = \cos(iz), \ \text{sh} z = -i\sin(iz), \ \text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1. \qquad (2.5)$$

***Пример.*** *Вычисление значений гиперболических функций.* Вычислить $w = \text{sh}\left(-i^3\right)$.

*Решение.* Запишем $\text{sh}\left(-i^3\right) = \text{sh}\left(-i\,i^2\right) = \text{sh} i$. Тогда, согласно соотношению (2.5), имеем $\text{sh}\, i = -i\sin(i\,i) = -i\sin(-1)$. Учитывая нечетность синуса, получаем $w = i\sin 1$.

***Пример.*** *Вычисление значений тригонометрических функций посредством перехода к гиперболическим.* Вычислить $w = \cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$.

*Решение.* Воспользуемся известной формулой косинуса суммы:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos i - \sin\frac{\pi}{4}\sin i = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos i - \sin i).$$

Применяя соотношения (2.5) получаем $\cos i = \text{ch}1$, $\sin i = i\text{sh}1$. Тогда $\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\text{ch}1 - i\text{sh}1)$.

6. **Определение.** *Логарифмом* (натуральным логарифмом) числа $z$ называется такое число $w$, что $e^w = z$, где $z \neq 0$. Значения логарифмической функции $w = \text{Ln} z$ вычисляются по формуле

$$\text{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \ k \in Z.$$

Величину $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ называют *главным значением логарифма.* Логарифмическая функция определена при всех $z \neq 0$ и многозначна.

Известные нам свойства логарифма сохраняются и в случае комплексной переменной.

***Пример.*** *Вычисление значений логарифма.* Вычислить $\text{Ln}(-1)$.

*Решение.* Так как $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, то

$$\text{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(1 + 2k), \ k \in Z.$$

7. В основу определения *показательной функции* положено известное (для случая действительной переменной) свойство

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\ln a}, a > 0.$$

Полагаем теперь для любых комплексных $a \neq 0$ и $z$

$$a^z = e^{z\text{Ln} a}. \qquad (2.6)$$

Эта функция также является многозначной в силу многозначности логарифма.

***Пример.*** *Вычисление значений показательной функции.* Вычислить $i^{-i}$.

*Решение.* По формуле (2.6) $i^{-i}=e^{-i\mathrm{Ln}i}$. При этом $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, значит $\mathrm{Ln}i=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)$. Теперь $-i\mathrm{Ln}i=\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)$, а тогда $i^{-i}=e^{\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)}$, $k\in Z$.

8. *Обратные тригонометрические функции* определяются как функции, обратные по отношению к синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу.

Значения обратных тригонометрических функций комплексного переменного вычисляются по формулам:

$$\mathrm{Arcsin}z=-i\mathrm{Ln}\left(zi+\sqrt{1-z^2}\right);\ \mathrm{Arccos}z=-i\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);$$

$$\mathrm{Arctg}z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz};\ \mathrm{Arcctg}z=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}.$$

***Пример.*** *Вычисление значений обратных тригонометрических функций.* Вычислить $\mathrm{Arc}\sin 2$.

*Решение.* $\mathrm{Arcsin}2=-i\mathrm{Ln}\left(2i+\sqrt{-3}\right)=-i\mathrm{Ln}\left(2i\pm\sqrt{3}i\right)=-i\mathrm{Ln}\left(2\pm\sqrt{3}\right)i$; здесь $\pm\sqrt{3}$ – значения уже арифметического корня из действительного числа. Поскольку числа $\left(2\pm\sqrt{3}\right)i$ имеют аргументом $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, то имеем два ответа:

$$\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)\ \text{и}\ \ln\left(2-\sqrt{3}\right)+i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right),\ \ k\in Z.$$

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Найти все значения корня и изобразить их на комплексной плоскости: а) $\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$; б) $\sqrt[4]{-16}$; в) $\sqrt[3]{\frac{i}{8}}$; г) $\sqrt[4]{i^3}$.

2. Вычислить значения: а) $\left(3-\sqrt{3}i\right)^6$; б) $\frac{(-2+2i)^8}{16}$; в) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; г) $e^{i-3}$.

3. Представить в алгебраической форме: 1) $\sin^2\frac{i}{2}$; 2) $\cos\left(8i^3\right)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-5i\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)$; 5) $\mathrm{sh}\left(2-\pi i\right)$; 6) $\mathrm{ch}\left(3+\frac{\pi i}{4}\right)$; 7) $\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{5}}\right)$; 8) $\mathrm{Ln}\,(2i\,(i-1))$; 9) $-i\mathrm{Ln}\left(-e^2\right)$; 10) $i^{1+i}$; 11) $1^{2i}$; 12) $(-i)^{-5i}$; 13) $\mathrm{Arc}\cos(-3i)$; 14) $\mathrm{Arc}\sin 4$; 15) $\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$.

4. Решить уравнения: а) $\ln(z+1)=\pi i$; б) $e^z+1=0$; в) $e^{z+1}=\pi i$.

## 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. *Производная функции комплексного переменного.*

Пусть $w=f(z)$ определена в точке $z=x+yi$ и некоторой ее окрестности. Пусть $x$ получает некоторое приращение $\Delta x$, а $y$ – приращение $\Delta y$. Тогда $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ – соответствующее приращение переменной $z$. Пусть $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$.

**Определение.** Если существует предел вида $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$, то он называется производной функции $f(z)$ в точке $z$; обозначается $f'(z)$; $w', \frac{dw}{dz}, \frac{df}{dz}$. Функция же $f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z$.

2. *Правила дифференцирования.* Справедливы правила дифференцирования, известные из действительного анализа. Например, если $f(z)=C$, где $C=\mathrm{const}$ (постоянное комплексное число), то $f'(z)=0$; $\left(Cf(z)\right)'=Cf'(z)$, $C=\mathrm{const}$ и т.п.

3. *Условия дифференцируемости.* Пусть $w=f(z)$ определена в точке $z=x+iy$ и в некоторой ее окрестности. Запишем $f(z)$ в виде $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$.

Необходимыми и достаточными условиями *дифференцируемости* $f(z)$ *в точке* $z$ являются дифференцируемость функций $u(x,\ y)$ и $v(x,\ y)$ в точке $(x,\ y)$ и выполнимость следующих условий Коши-Римана:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}\qquad(3.1)$$