6.8.32. Испытания по схеме Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании повторяются до двух успехов. Построить ряд распределения числа проведенных испытаний. Найти вероятность того, что в первых N испытаниях число успехов меньше 2.

6.8.33. Пользуясь условием задачи 6.8.29, построить ряд распределения с. в. $Z = \min\{X, Y\}$.

6.8.34. Какая из нижеприведенных последовательностей является распределением вероятностей некоторой дискретной случайной величины?
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}; \quad b_n = p^n \cdot (1-p)^2,\ 0 < p < 1;$$
$$c_n = \frac{4^{n-1}}{(n-1)!}e^{-4}; \quad d_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{n-1}^{n} \frac{dx}{1+x^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6.8.35. Дискретная с. в. X принимает целочисленные значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3, \ldots$. Известно, что $p_n = P\{X = n\} = \dfrac{c}{n^2 + 3n + 2}$. Найти:

а) значение параметра c;

б) вероятность события $D = \{X = 5\}$.

6.8.36. Может ли функция $F(x)$ быть функцией распределения некоторой с. в., если:

а) $F(x) = e^{-x}$; **б)** $F(x) = e^{x}$;

в) $F(x) = 1 - e^{x}$; **г)** $F(x) = 1 - e^{-x}$;

д) $F(x) = 0{,}5 + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}(x)$;

е) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0{,}4, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}35, & 1 < x \leqslant 5, \\ 1, & 5 < x? \end{cases}$

6.8.37. Можно ли утверждать, что событие C является невозможным, если $P(C) = 0$?

6.8.38. Совпадают ли законы распределения дискретных случайных величин $X + X$ и $2 \cdot X$?

6.8.39. Дискретная с. в. X принимает натуральные значения, причем значение n с вероятностью $\frac{1}{2^n}$. Построить ряд распределения вероятностей для с. в. $Y = \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}X\right)\right|$.

§ 9. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В предыдущем параграфе было введено понятие непрерывной случайной величины (н. с. в.). Можно дать другое, более строгое, определение н. с. в., используя понятие функции распределения.

⇛ Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей числовой оси. ⇚

В отличие от дискретных случайных величин вероятность отдельного значения для непрерывной случайной величины равна нулю: $P\{X = c\} = 0$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Поэтому для н. с. в. X имеем:

$$P\{a \leqslant X < b\} = P\{a < X < b\} = P\{a < X \leqslant b\} = P\{a \leqslant X \leqslant b\} = F(b) - F(a).$$

Помимо функции распределения для непрерывных случайных величин, существует еще один удобный способ задания закона распределения — плотность вероятности.

⇛ Пусть функция распределения $F(x)$ данной н. с. в. X непрерывна и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек. Тогда производная $f(x)$ ее функции распределения называется *плотностью распределения* непрерывной с. в. X (или «плотностью вероятности», или просто «плотностью»):

$$f(x) = F'(x).$$ ⇚

Наряду с обозначением $f(x)$ для плотности распределения используется также обозначение $p(x)$ (т. е. $p(x) = F'(x)$).

Свойства плотности распределения:

1. $f(x) \geqslant 0$ (свойство неотрицательности);
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (свойство нормированности);
3. $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$;
4. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

⇛ График плотности распределения $f(x)$ называется *кривой распределения*. ⇚

6.9.1. Задана функция распределения н. с. в. X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3, \\ C(x-3)^2, & \text{при } 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ 1, & \text{при } 5 < x. \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент C;

б) плотность распределения $f(x)$ с. в. X и построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;

в) $P\{X \in [3, 4)\}$.

○ а) Так как с. в. X — непрерывна, то $F(x)$ должна быть непрерывной функцией в любой точке, в частности, и при $x = 5$. Так как $F(5) = 1$, то $C \cdot (5-3)^2 = 1$, откуда $C = \frac{1}{4}$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3, \\ \frac{1}{4}(x-3)^2, & \text{при } 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ 1, & \text{при } 5 < x. \end{cases}$$

б) Плотность распределения $f(x) = F'(x)$ выражается формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3, \\ \frac{1}{2}(x-3), & \text{при } 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0, & \text{при } 5 < x. \end{cases}$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ представлены на рис. 80 и рис. 81.

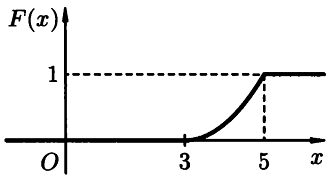

Рис. 80

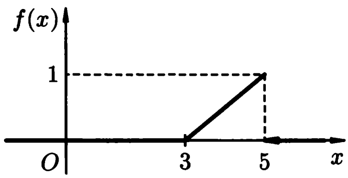

Рис. 81

в) Используя формулу $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, находим, что

$$P\{X \in [3, 4)]\} = P\{3 \leqslant X < 4\} = \int\limits_3^4 \frac{1}{2}(x-3)\,dx = \frac{1}{4}.$$

Или, иначе $P\{3 \leqslant X < 4\} = F(4) - F(3) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$. ●

6.9.2. При каких значения параметров k и b функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ kx + b, & -1 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x \end{cases}$$

может быть функцией распределения некоторой непрерывной с. в. X? Найти вероятность того, что с. в. X примет значение, заключенное в промежутке $(-2{,}3; 1{,}5)$. Построить график плотности распределения этой случайной величины.

6.9.3. Задана функция распределения н. с. в. X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi, \\ a(\cos x + c), & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x. \end{cases}$$

Найти:

а) значения постоянных a и c;

б) $f(x)$;

в) $P_1\left\{X \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$, $P_2\left\{X = \frac{\pi}{2003}\right\}$.

6.9.4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant A, \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1, & A < x \leqslant B, \\ 1, & B < x. \end{cases}$$

Найти: значения A и B, плотность распределения н. с. в. X, вероятность события $C = \{X \in (3; 5)\}$.

6.9.5. При каком значении параметра C функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C}{x^4}, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

может быть плотностью распределения некоторой непрерывной с. в. X? Найти $P\{1 < X < 5\}$.

◐ Очевидно, что $f(x) > 0$ при $C > 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Используя свойство нормированности ($\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$), найдем значение параметра C:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{C}{x^4}\,dx = C \cdot \lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-4}\,dx =$$
$$= -\frac{C}{3} \cdot \lim_{b\to\infty} \frac{1}{x^3}\Big|_1^b = -\frac{C}{3}(0-1) = \frac{C}{3},$$

т. е. $\frac{C}{3} = 1$, отсюда $C = 3$. Таким образом, функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4}, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

является плотностью распределения некоторой с. в. X.

Найдем искомую вероятность, используя формулу

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Получаем:

$$P\{1 \leqslant X \leqslant 5\} = P\{1 < X < 5\} = \int\limits_1^5 \frac{3}{x^4}\,dx = 3 \cdot \frac{1}{-3x^3}\Big|_1^5 = \frac{124}{125} = 0{,}992.$$ ●

6.9.6. Непрерывная с. в. X имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$; построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

◔ Используем формулу

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

При $x \in (-\infty, 1)$ имеем:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0.$$

При $x \in [1, +\infty)$ промежуток интегрирования разбивается на два:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0 \cdot dt + \int\limits_{1}^{x} \frac{3}{t^4}\,dt = 3\int\limits_{1}^{x} t^{-4}\,dt = -\frac{1}{t^3}\Big|_1^x = -\frac{1}{x^3} + 1.$$

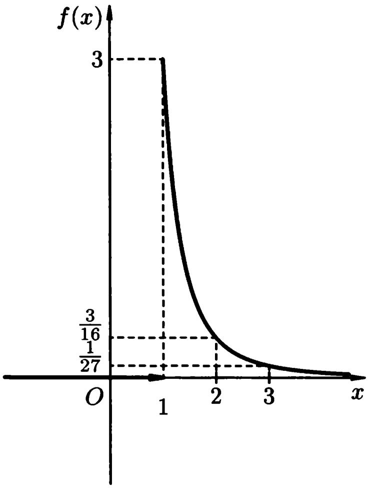

Рис. 82

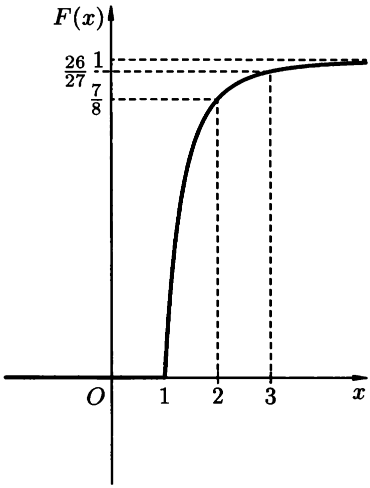

Рис. 83

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^3}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ представлены соответственно на рис. 82 и рис. 83. ●

6.9.7. Непрерывная случайная величина X распределена «по закону прямоугольного треугольника» на интервале $(0, 4)$; на рис. 84 изображена плотность распределения этой с. в. Найти:

а) значение y_0;

б) аналитическое выражение для плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$. Построить график $F(x)$.

а) Так как площадь S фигуры, ограниченной сверху кривой распределения (т. е. графиком функции $f(x)$), а снизу — осью Ox, равна 1, то $S = S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot y_0 = 1$. Отсюда $y_0 = \frac{1}{2}$.

б) Уравнение прямой AB найдем как уравнение прямой, проходящей через точки $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ и $B(4; 0)$): $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$. Аналитическое выражение для плотности распределения с. в. X таково:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}, & x \in [0, 4], \\ 0, & x \notin [0, 4]. \end{cases}$$

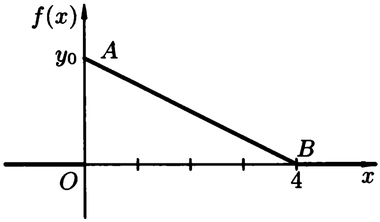

Рис. 84

Теперь найдем функцию распределения $F(x)$:

если $x \in (-\infty, 0)$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$;

если $x \in [0, 4]$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{x} \left(-\frac{1}{8}t + \frac{1}{2}\right) dt = \left(-\frac{1}{16}t^2 + \frac{t}{2}\right)\Big|_0^x = -\frac{x^2}{16} + \frac{x}{2};$$

если $x \in (4, +\infty)$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{4} \left(-\frac{1}{8}t + \frac{1}{2}\right) dt + \int\limits_{4}^{x} 0\,dt =$$

$$= 0 + \left(-\frac{t^2}{16} + \frac{t}{2}\right)\Big|_0^4 + 0 = -1 + 0 + 2 - 0 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 85. ●

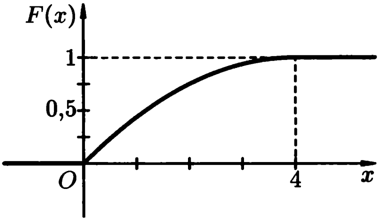

Рис. 85

6.9.8. Дана плотность распределения с. в. X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ b \cdot x, & \text{при } 0 \leqslant x < 5{,}8, \\ 0, & \text{при } 5{,}8 \leqslant x. \end{cases}$$

Определить постоянную b, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, вычислить вероятность того, что с. в. X примет значение, удовлетворяющее условию:

а) $X < 3{,}3$; **б)** $3{,}3 < X < 7{,}8$.

6.9.9. Плотность вероятности с. в. X имеет вид

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найти значение параметра a, функцию распределения $F(x)$.

6.9.10. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{4 - x^2}}, & |x| < 2, \\ 0, & |x| \geqslant 2. \end{cases}$$

Найти:

а) значение параметра c;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $P\{1 < X < 5\}$.

6.9.11. Задана плотность распределения н. с. в. X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ 2x - 2, & 1 < x \leqslant 2, \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$$

Что вероятнее: попадание случайной величины в интервал (1,6; 1,8) или в (1,9; 2,6)?

6.9.12. Задана плотность распределения н. с. в. X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -A, \\ -x, & -A \leqslant x < 0, \\ 2x, & 0 \leqslant x < A, \\ 0, & A \leqslant x. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $P\{-2 < X < 1\}$.

6.9.13. График плотности распределения н. с. в. X имеет вид, изображенный на рис. 86. Записать аналитическое выражение для плотности распределения $f(x)$.

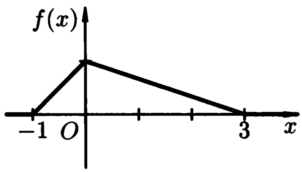

Рис. 86

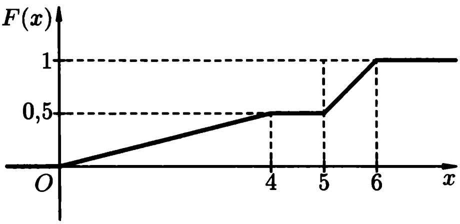

Рис. 87

Дополнительные задания

6.9.14. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 3^x, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность $f(x)$;

б) вероятность того, что с. в. X в результате опыта примет значение в интервале $(-1, 1)$.

6.9.15. На рис. 87 задан график функции распределения с. в. X. Найти аналитическое выражение для:

а) $F(x)$; **б)** $f(x)$.

Построить график плотности распределения с. в. X.

6.9.16. Функция распределения н. с. в. X задана выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\frac{\pi}{6}, \\ a \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + b, & -\frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \frac{\pi}{3} < x. \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициенты a, b; **б)** плотность $f(x)$;

в) $P\left\{0 \leqslant X < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Построить график функции $f(x)$.

6.9.17. Задана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ a \cdot x^2, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Определить:

а) при каком значении a функция $F(x)$ будет функцией распределения некоторой с. в. X;

б) плотность вероятности с. в. X;

в) вероятность события $D = \left\{-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$.

6.9.18. Функция распределения с. в. X имеет вид $F(x) = a + b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Найти:

а) значение параметров a и b;

б) плотность вероятности.

6.9.19. Функция распределения н. с. в. X — времени безотказной работы некоторого прибора — равна $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{T}}$, $x \geqslant 0$. Найти $P\{X > T\}$, т. е. вероятность безотказной работы прибора за время, большее T.

6.9.20. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot x \cdot e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

При каком значении параметра A эта функция является плотностью распределения некоторой н. с. в. X? Найти $F(x)$.

6.9.21. Задана плотность вероятности случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ -Ax, & -4 \leqslant x < 0, \\ A\sqrt{x}, & 0 \leqslant x < 4, \\ 0, & 4 \leqslant x. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $P\{-1 < X < 5\}$.

6.9.22. Плотность вероятности н. с. в. X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -A, \\ -\frac{x}{2}, & -A \leqslant x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leqslant x < 2A, \\ 0, & 2A \leqslant x. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $P\{-0{,}5 < X < 2\}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.9.23. Задана некоторая функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ \frac{1}{6}\cdot(x+1)^3, & -1 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Является ли она функцией распределения некоторой случайной величины X? Чему равна вероятность события

$$A = \{0 \leqslant X < 1\}?$$

6.9.24. Значения с.в. X находятся в промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Может ли функция распределения $F(x)$ равняться на этом участке:

а) $\sin x$; **б)** x^2;

в) 1,1; **г)** $\cos x$;

д) $\frac{2x}{\pi}$?

6.9.25. Непрерывная с.в. X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{4}, \\ a\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+b, & -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}, \\ c, & \frac{3\pi}{4} < x. \end{cases}$$

Найти:

а) значения a, b, c;

б) плотность $f(x)$ распределения с.в. X. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

6.9.26. Функция распределения н.с.в. X, равная

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ ax^2+bx+c, & 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$$

Функция $F(x) = ax^2+bx+c$ при $x = 2$ имеет максимум. Найти:

а) параметры a, b, c;

б) вероятности событий $A = \{X > 3\}$, $B = \{1 \leqslant X < 3\}$, $E = \{X \in (-1; 1{,}5)\}$.

6.9.27. Непрерывная с.в. X распределена по закону Лапласа:

$$f(x) = A\cdot e^{-\lambda\cdot|x|}, \text{где } \lambda > 0.$$

Найти коэффициент A и функцию распределения $F(x)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

6.9.28. Непрерывная с.в. X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \sqrt{3}, \\ \frac{x^6 - x^4 - 18}{30}, & \sqrt{3} < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$$

Найти $P\{1{,}8 < X < 2{,}8\}$, $f(x)$; построить графики $F(x)$ и $f(x)$.