Более сложные задачи

7.2.28. Используя дифференциал, доказать приближенную формулу $(1+\alpha)^n \approx 1 + n \cdot \alpha$.

7.2.29. Используя определение, доказать, что функция $y = |x|$ не является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$.

7.2.30. Вычислить приближенно:

1) $\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$ при $x = 1{,}04$;

2) $\sqrt[5]{\dfrac{1{,}98}{2{,}02}}$.

7.2.31. Показать, что если $y = f(u(x))$, то $d^2y \neq y''_u du^2$, т. е. свойство инвариантности для дифференциалов второго порядка не выполняется.

§ 3. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ. ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ. ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Теоремы о среднем

Теорема 7.1 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и принимает на концах отрезка равные значения (т. е. $f(a) = f(b)$). Тогда существует по крайней мере одна точка c на интервале $(a; b)$, для которой $f'(c) = 0$.

Теорема 7.2 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда на интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Теорема 7.3 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a; b)$. Тогда найдется такая точка c на этом интервале, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правила Лопиталя

Первое правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (в этом случае говорят, что в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Второе правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и $g'(x) \neq 0$ для $\forall x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$. Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$ (т. е. в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если отношение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ в свою очередь представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя (при условии выполнения соответствующих ограничений на функции $f'(x)$ и $g'(x)$) можно применять второй раз и т. д.

Формула Тейлора

$\Rrightarrow$ Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные f', $f'', \ldots, f^{(n)}$. Тогда для любой точки x из этой окрестности имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big) \text{ при } x \to x_0.$$

Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Последнее слагаемое (т. е. остаточный член) в формуле Тейлора иногда записывают в виде $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ (в этом случае надо дополнительно предполагать существование $f^{(n+1)}(x)$ в данной окрестности точки x_0). Соответствующая формула тогда называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

В случае $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0$$

и называется *формулой Маклорена.*

Полезно помнить разложения по формуле Маклорена некоторых важнейших элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n).$$

7.3.1. Проверить, справедлива ли теорема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 2x$ на отрезке $[-1; 3]$, найти соответствующее значение c (если оно существует).

○ Функция непрерывна на отрезке $[-1; 3]$ и дифференцируема на интервале $(-1; 3)$. Кроме того, $f(-1) = f(3) = 3$, поэтому теорема Ролля на данном отрезке для данной функции справедлива. Найдем значение $c \in (-1; 3)$, для которого $f'(c) = 0$, из равенства $(x^2 - 2x)' = 0$, т. е. $2x - 2 = 0$, откуда $x = 1$. Поскольку $1 \in (-1; 3)$, то $c = 1$ — искомое значение. ●

Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

7.3.2. $f(x) = |x| - 2$, $[-2; 2]$.

7.3.3. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, $[0; 4]$.

7.3.4. $f(x) = \cos x$, $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

7.3.5. $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $[-1; 1]$.

Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение с (если оно существует):

7.3.6. $f(x) = e^x$, $[0; 1]$.

7.3.7. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$.

7.3.8. $f(x) = |x - 1|$, $[0; 3]$.

Найти точку, в которой касательная к кривой $y = f(x)$ параллельна хорде, соединяющей точки A и B на этой кривой:

7.3.9. $y = x^2 - 4x$, $A(1; -3)$; $B(5; 5)$. Сделать поясняющий рисунок.

7.3.10. $y = \ln x$, $A(1; 0)$; $B(e; 1)$.

7.3.11. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\sin 3x}{\ln x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$.

○ 1) Поскольку $\ln\sin 3x$ и $\ln x$ стремятся к бесконечности при $x \to 0$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sin 3x}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln\sin 3x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot \cos 3x}{\sin 3x} =$$
$$= 3 \lim_{x\to 0} \cos 3x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = 3 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}} = 1.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

2) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = \lim\limits_{x\to 0}(x - \sin x) = 0$, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(3x^2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin x} = 6 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = 6.$$

В этом примере правило Лопиталя применялось дважды. ●

Найти пределы:

7.3.12. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 + x - 10}{x^3 - 3x - 2}$.

7.3.13. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

7.3.14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

7.3.15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

7.3.16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$.

7.3.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}2x}$.

7.3.18. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

○ 1) Здесь имеет место неопределенность вида $0\cdot\infty$, которую мы раскроем, предварительно сведя ее к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$; а далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+0} x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0+0}x=0.$$

2) Имеем неопределенность $\infty-\infty$. Сведем ее к неопределенности $\frac{0}{0}$, приведя дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Правило Лопиталя в этом примере применялось дважды. ●

Найти пределы:

7.3.19. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-x}$.

7.3.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

7.3.21. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

7.3.22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$.

7.3.23. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

○ 1) В этом случае имеем неопределенность вида 0^0. Неопределенности этого вида, также как и неопределенности вида 1^∞, ∞^0, можно найти, предварительно вычислив предел от логарифма функции.

Итак, обозначим $y=x^x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln(x^x)=\lim_{x\to 0}x\ln x=0$$

(задача 7.3.18). Таким образом,

$$\ln \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \ln y = 0,$$

откуда $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

2) Здесь неопределенность вида 1^∞. Обозначив $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, найдем $\lim\limits_{x\to 0} \ln y$:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \\ = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos x))'}{x'} = \lim_{x\to 0}(-\operatorname{tg} x) = 0.$$

Отсюда $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \ln y = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1$. ●

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

7.3.24. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}$.

7.3.25. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

7.3.26. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

7.3.27. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$.

7.3.28. Разложить многочлен $P(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ по степеням $x - 1$, используя формулу Тейлора.

○ Так как $P^{(n)}(x) \equiv 0$ при $n \geqslant 5$, то в разложении данного многочлена по формуле Тейлора будут только слагаемые вида $\frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)$, где $k \leqslant 4$. Поэтому

$$P(x) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 + \\ + \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{P^{(IV)}(1)}{4!}(x-1)^4.$$

Учитывая, что $P(1) = 2$, $P'(1) = 7$, $P''(1) = 16$, $P'''(1) = 18$, $P^{(IV)}(1) = 24$, получим окончательно

$$P(1) = 2 + 7(x-1) + 8(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4.$$ ●

Разложить многочлен $P(x)$ по степеням $x - x_0$, если

7.3.29. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 8$, $x_0 = -1$.

7.3.30. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x + 2$, $x_0 = 2$.

7.3.31. **1)** Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$;

2) Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ до $o(x^3)$.

1) Сначала найдем формулу для n-го члена разложения. Так как

$$f'(1) = -1!,\ f''(1) = 2!,\ f'''(1) = -3!,\ f^{(IV)}(1) = 4!,\ \ldots,\ f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot n!,$$

то $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = (-1)^n \cdot (x-1)^n$. Отсюда

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots \cdots + (-1)^n \cdot (x-1)^n + o((x-1)^n), \quad x \to x_0.$$

2) Необходимо представить данную функцию в виде

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(0) + \frac{\operatorname{arctg}'(0)}{1!}x + \frac{\operatorname{arctg}''(0)}{2!}x^2 + \frac{\operatorname{arctg}'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \quad \operatorname{arctg}'(0) = \left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0} = 1,$$

$$\operatorname{arctg}''(0) = \left.\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0} = 0, \quad \operatorname{arctg}'''(0) = \left.\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\right|_{x=0} = -2,$$

получим требуемое разложение:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ в точке x_0:

7.3.32. $f(x) = 2^x$, $x_0 = \log_2 3$.

7.3.33. $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{2}$, $x_0 = 1$.

Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)$ до $o(x^k)$, где

7.3.34. $f(x) = e^{2-x}$, $k = 4$.

7.3.35. $f(x) = \arcsin x$, $k = 3$.

Дополнительные задачи

Проверить, выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

7.3.36. $f(x) = x^2$, $[1; 3]$.

7.3.37. $f(x) = x^3 - 16x$, $[-4; 4]$.

7.3.38. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $\left[-\frac{4}{\pi}; \frac{4}{\pi}\right]$.

7.3.39. $f(x) = x - [x]$, $[-3; -1]$.

Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

7.3.40. $f(x) = x^3$, $[-3; 0]$.

7.3.41. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $[-2; 1]$.

7.3.42. $f(x) = \ln x$, $[e; e^2]$.

Найти точку M, в которой касательная к кривой $y = f(x)$ параллельна хорде AB, если:

7.3.43. $y = \sqrt{x}$, $A(1;1)$; $B(4;2)$. Сделать поясняющий чертеж.

7.3.44. $y = -x^2 + x$, $A(0;0)$; $B(2;-2)$.

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

7.3.45. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10} - 2x + 1}{x^{20} - 4x + 3}$.

7.3.46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1} - 1}$.

7.3.47. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$.

7.3.48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - x}{x^3}$.

7.3.49. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3} - 1}{\sin^3 x}$.

7.3.50. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(x-2)}$.

7.3.51. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log_2 x}{2^x}$.

7.3.52. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3 - x}{5x^3 + x^2 - 7x + 3}$.

7.3.53. $\lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$.

7.3.54. $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{2}} \left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} t$.

7.3.55. $\lim\limits_{x\to 0} x \ln \operatorname{ctg} x$.

7.3.56. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\pi - 2x}\right)$.

7.3.57. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \left(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

7.3.58. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)$.

7.3.59. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

7.3.60. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\pi} \arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

7.3.61. $\lim\limits_{x\to \infty} (1 + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.

7.3.62. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$.

7.3.63. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - x)^{\ln x}$.

7.3.64. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2} - 0} (\pi - 2x)^{\cos x}$.

Разложить многочлен $P(x)$ по степеням $x - x_0$, если

7.3.65. $P(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$, $x_0 = -2$.

7.3.66. $P(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + \dfrac{7}{8}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ в точке x_0:

7.3.67. $f(x) = xe^x$, $x_0 = -1$.

7.3.68. $f(x) = \ln(2x - 1)$, $x_0 = 1$.

Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)$ до $o(x^k)$, где

7.3.69. $f(x) = \sin^2 x$, $k = 4$.

7.3.70. $f(x) = \operatorname{ch} x$, $k = 5$.

7.3.71. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до $o(x^k)$, $k = 1, 2, 3$ и построить разными цветами в одной системе координат графики $f(x)$ и соответствующих многочленов Тейлора $P_1(x)$, $P_2(x)$ и $P_3(x)$.

Более сложные задачи

7.3.72. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = f(b)$. Следует ли из того, что $f(x)$ дифференцируема не во всех точках интервала $(a; b)$ (т. е. условия теоремы Ролля не выполнены), что не существует такой точки $c \in (a; b)$, что $f'(c) = 0$?

7.3.73. Используя теорему Лагранжа, доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет положительную (соответственно отрицательную) производную на интервале $(a; b)$, то она возрастает (соответственно убывает) на этом отрезке.

Используя теорему Лагранжа, доказать неравенства:

7.3.74. $e^x > 1 + x$ при $x \in \mathbb{R}$.

7.3.75. $n(a-b)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ при $0 < a < b$, $n = 2, 3, \ldots$

7.3.76. Пусть x_1 и x_2 — корни многочлена $P(x)$. Доказать, что у многочлена $P'(x)$ найдется корень, лежащий между x_1 и x_2.

7.3.77. Доказать, что если $f'(x) = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), то $f(x) = \mathrm{const}$.

7.3.78. Доказать, что производная функции $f(x) = (x^2 - 1) \cdot x \cdot (x^2 - 4)$ имеет четыре действительных корня, и найти интервалы, в которых они находятся.

Доказать тождества:

7.3.79. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [0; 1]$.

7.3.80. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$.

7.3.81. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$.

7.3.82. Показать, что предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \cos x}{x + \cos x}$ не может быть вычислен по правилу Лопиталя. Найти этот предел другим способом.

Используя формулу Маклорена, доказать неравенства:

7.3.83. $\ln(1 + x) < x$ при $x > 0$.

7.3.84. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.