6.3.44. Показать, что:

1) каждая бесконечно большая последовательность является неограниченной;

2) не каждая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

6.3.45. Найти пределы (в пунктах 2) и 3) предварительно доказать, что предел существует):

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2 - 3x_n + 2}{x_n - 2}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n = \sqrt{6 + x_{n-1}}$, $x_1 = \sqrt{6}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 - 9}{8}$, $x_1 = 7$.

6.3.46. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 6} + \dfrac{1}{6\cdot 8} + \dots + \dfrac{1}{2n(2n+2)}\right)$.

6.3.47. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая, а $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — бесконечно большие последовательности. Верно ли, что всегда:

1) $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно большая последовательность;

2) $\{x_n \cdot y_n\}$ — бесконечно малая последовательность;

3) $\{x_n \cdot y_n\}$ — сходящаяся последовательность;

4) $\{y_n \cdot z_n\}$ — бесконечно большая последовательность;

5) $\{y_n + z_n\}$ — расходящаяся последовательность?

6.3.48. Привести пример таких сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, что:

1) $x_n > y_n \;\; \forall n$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $x_n > 100 y_n > 0 \;\; \forall n$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

6.3.49. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+k}$, где $k \in \mathbb{N}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{1+n}\right)^{n}$.

§ 4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение предела

⇛ *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0. Дадим первое определение предела функции (по Гейне):

$\Rrightarrow$ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 ($x_n \neq x_0$ $\forall n$), последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначается это так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ (при $x \to x_0$).

Первое определение предела функции эквивалентно второму определению (по Коши):

$\Rrightarrow$ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Первое определение называется также определением предела функции «на языке последовательностей», а второе — определением предела «на языке ε–δ» (эпсилон–дельта).

Операции над пределами функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда:

1. Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (соответственно, разности) их пределов, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$$

2. Предел произведения функций равен произведению их пределов, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B.$$

3. Предел частного функций равен частному их пределов (при условии $B \neq 0$), т. е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела функции, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \implies \forall \alpha \in R: \ \lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha A.$$

Для функций справедливы аналоги соответствующих теорем для последовательностей о пределах корня и степени.

Пределы функций и неравенства

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ для всех значений x из этой окрестности. Пусть, кроме того,

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = A_2.$$

Тогда $A_1 \leqslant A_2$.

Теорема 6.2 (о промежуточной переменной). Пусть функции $f_1(x)$, $f(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$ верно неравенство $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ также существует и равен A.

Теорема 6.3 (о сохранении знака). Если предел функции в данной точке x_0 положителен, то и все значения функции в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0) положительны.

Теорема 6.4 (об ограниченности функции, имеющей предел). Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a; +\infty)$.

$\Rrightarrow$ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любой положительной бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ (т. е. $x_n \to +\infty$, $n \to \infty$) последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Равносильное определение предела функции при $x \to +\infty$ на языке ε–δ будет выглядеть так:

$\Rrightarrow$ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех значений $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.
Обозначение: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Односторонние пределы

$\Rrightarrow$ Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки x_0, т. е. на некотором интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$. Тогда говорят, что число A называется *пределом функции $f(x)$ справа* в точке x_0 (или *правосторонним пределом*), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 и такой, что все ее члены больше, чем x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

Обозначения: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$ или $f(x_0 + 0) = A$.

Аналогично определяется *предел функции слева* (или *левосторонний предел*) в точке x_0, обозначаемый $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют и односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, причем все три числа равны, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Часто используются следующие следствия из обоих замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

$\Rrightarrow$ Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$ (или в окрестности точки x_0), если $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$.

Таким образом,

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x) \iff f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

⇛ Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$ Тогда:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка в окрестности точки* x_0.

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно* малыми (в окрестности точки x_0), что обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$.

2) Если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to x_0$ и говорят, что $\alpha(x)$ — *о малое* от $\beta(x)$ при $x \to x_0$. В частности, если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то $\alpha(x) = o(1)$, $x \to x_0$.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad a^x - 1 \sim x\ln a \text{ (в частности, } e^x - 1 \sim x),$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, $x \to x_0$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x) = \lim_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta_1(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.

6.4.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$, используя

1) первое определение предела функции;

2) второе определение предела функции.

◐ 1) Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к 2, т. е. такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Тогда в соответствии со свойствами пределов последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = = \lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+1) = 2\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 2\cdot 2 + 1 = 5$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=5$ для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке $x_0 = 2$, то по первому определению предела функции это как раз и означает, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$.

2) Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется по этому ε найти такое $\delta > 0$, чтобы из условия $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$, т.е. из $0 < |x - 2| < \delta$ вытекало бы неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ т.е. } |(2x+1) - 5 < \varepsilon|.$$

Последнее неравенство приводится к виду $|2(x - 2)| < \varepsilon$, т.е. $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то неравенство $|x-2| < \delta$ будет автоматически влечь за собой неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$ (это значит, что для всех x, для которых верно первое неравенство, будет верно и второе). В соответствии со вторым определением предела функции это означает, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 5$. ●

Используя первое определение предела функции, найти пределы:

6.4.2. $\lim\limits_{x\to -1}(4x+3)$.

6.4.3. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4x + 8)$.

6.4.4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}$.

6.4.5. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 1}$.

Используя второе определение предела функции, доказать, что:

6.4.6. $\lim\limits_{x\to 0}(3x - 2) = -2$.

6.4.7. $\lim\limits_{x\to 1}(-x + 4) = 3$.

6.4.8. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

6.4.9. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{5}$.

6.4.10. Доказать, что функция $y = \operatorname{sign} x$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

◑ Действительно, если выбрать последовательность $\{x'_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, сходящуюся к нулю, то

$$\lim_{x\to\infty} f(x'_n) = \lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{sign}\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1,$$

т. е. последовательность $\{f(x'_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к единице.

Если же выбрать последовательность $\{x''_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\}$, также сходящуюся к нулю, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1.$$

Таким образом, мы нашли две различные последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, сходящиеся к точке $x_0 = 0$, для которых соответствующие последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ значений функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ сходятся к различным числам. Это противоречит первому определению предела функции, и, значит, у функции $\operatorname{sign} x$ нет предела в точке $x_0 = 0$. ●

Доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0, если:

6.4.11. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$.

6.4.12. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geqslant 2, \\ x & \text{при } x < 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$.

6.4.13. Доказать по второму определению предела, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$, где $f(x) = \dfrac{2(x-1)^2}{x-1} + 1$, $x_0 = 1$. Найти соответствующее δ по данному ε, если:

1) $\varepsilon = \frac{1}{2}$;

2) $\varepsilon = 0{,}01$.

6.4.14. Используя свойства пределов функций, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2}$;

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + x - x^2}{2x^2 + 3x}$.

◑ 1) Применяя теорему о действиях над пределами функций, получим:

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to -1}(3x^2 - 1)}{\lim\limits_{x \to -1}(4x^2 + 5x + 2)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -1} 3x^2 - \lim\limits_{x \to -1} 1}{\lim\limits_{x \to -1} 4x^2 + \lim\limits_{x \to -1} 5x + \lim\limits_{x \to -1} 2} =$$

$$= \frac{3 \lim\limits_{x \to -1} x \cdot \lim\limits_{x \to -1} x - 1}{4 \lim\limits_{x \to -1} x \cdot \lim\limits_{x \to -1} x + 5 \lim\limits_{x \to -1} x + 2} =$$

$$= \frac{3 \cdot (-1)(-1) - 1}{4(-1)(-1) + 5(-1) + 2} = 2.$$

2) Так как пределы числителя и знаменателя при $x \to 2$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. «Раскроем» эту неопределенность (т. е. избавимся от нее), разложив

числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель $x - 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}.$$

В полученной дроби знаменатель уже не стремится к нулю при $x \to 2$, поэтому можно применять теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)} = \frac{2+2}{2-3} = -4.$$

Окончательно $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -4.$

3) Здесь мы также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю (избавляемся от иррациональности в числителе):

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8})^2-3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{\sqrt{1+8}+3} = \frac{1}{6}.$$

4) Числитель и знаменатель дроби — бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрывая эту неопределенность, поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т. е. на x^2:

$$\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}}.$$

Осталось воспользоваться свойствами пределов, а также тем, что функции $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ — бесконечно малые при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)} =$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = \frac{0+0-1}{2+0} = -\frac{1}{2}. \quad \bullet$$

Найти пределы:

6.4.15. $\lim\limits_{x\to-2}(5x^2+2x-1)$.

6.4.16. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+1}{x^3-2x+3}$.

6.4.17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2-x}$.

6.4.18. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2^x-8}{2^x+8}$.

6.4.19. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$.

6.4.20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-3x^2+x}{2x}$.

6.4.21. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}$.

6.4.22. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-x-1}{-6x^2+5x+4}$.

6.4.23. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{2x^3-2x^2+x-1}$.

6.4.24. $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+7x+6}{x^3+6x^2+3x+18}$.

6.4.25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$.

6.4.26. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x}-4}$.

6.4.27. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

6.4.28. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$.

6.4.29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$.

6.4.30. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{x-3}}$.

6.4.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}$.

6.4.32. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2+7x-2}$.

6.4.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

6.4.34. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x}{2x^3+x^2+1}$.

6.4.35. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)$.

6.4.36. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-3}-x\right)$.

6.4.37. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\sin3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

○ 1) Сделаем замену $y=\alpha x$; тогда $y\to0$ при $x\to0$ и $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin y}{\left(\frac{y}{\alpha}\right)}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\alpha\sin y}{y}=\alpha\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin y}{y}=\alpha$. В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\alpha$.

2) Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x, после чего воспользуемся предыдущим пунктом:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin5x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin3x}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin5x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{x}\right)}=\frac{5}{3}.$$

3) Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену $y = x - \frac{\pi}{2}$. Тогда $y \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$, а $x = y + \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \pi} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}.$$

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем — первый замечательный предел.

4) Сделаем замену $t = \arcsin x$, т. е. $x = \sin t$. Ясно, что $t \to 0$ при $x \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}} = 1. \qquad \bullet$$

Найти пределы:

6.4.38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$.

6.4.39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

6.4.40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

6.4.41. $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

6.4.42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$.

6.4.43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2}$.

6.4.44. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x}$.

6.4.45. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$.

6.4.46. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^x$, $k \in \mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + 5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{7x}$.

❍ 1) В данном случае мы имеем неопределенность вида 1^∞. Для ее раскрытия сделаем замену $y = \frac{x}{k}$. Тогда $y \to \infty$ при $x \to \infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k\cdot\frac{x}{k}} = \lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ky} =$$

$$= \left[\lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^k = e^k.$$

2) Поскольку $\sqrt[x]{1+5x} = (1+5x)^{\frac{1}{x}}$, то здесь мы также имеем дело с неопределенностью 1^{∞}, для раскрытия которой нам снова понадобится одна из форм второго замечательного предела. Сделаем замену $y = 5x$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+5x} = \lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5} =$$

$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}\cdot 5} = \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^5 = e^5.$$

3) Поделив числитель и знаменатель дроби на x, сведем данный предел к частному пределов из пункта 1):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

4) Сделав замену $y = 2x$ и применяя одно из следствий из второго замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{7x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{\frac{7}{2}y} = \frac{2}{7}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = \frac{2}{7}.$$

●

6.4.47. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{m}{x}\right)^{nx} = e^{mn}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x} = a$.

Найти пределы:

6.4.48. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[2x]{1+3x}$.

6.4.49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)^x$.

6.4.50. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6.4.51. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$.

6.4.52. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$.

6.4.53. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

6.4.54. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

6.4.55. $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+3)-\ln x]$.

6.4.56. Найти пределы справа и слева функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $x_0 = 0$.

❍ Так как $f(x) = 1$ при $x > 0$, то

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} 1 = 1.$$

Аналогично находим:

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} (-1) = -1.$$ ●

Найти односторонние пределы функций $f(x)$ в точке x_0:

6.4.57. $f(x) = [x]$, $x_0 = 2$.

6.4.58. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \frac{x}{3} & \text{при } x > 1; \end{cases}$

а) $x_0 = 1$;

б) $x_0 = 11$.

6.4.59. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$.

❍ 1) В силу следствия из первого замечательного предела $\sin \alpha x \sim \alpha x$, $x \to 0$. Отсюда (при $x \to 0$) $\sin 4x \sim 4x$, а $\sin 3x \sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

2) При $x \to 0$ имеем $e^x - 1 \sim x$ и $1 - \cos \sim \frac{x^2}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot (e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = 2.$$ ●

Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

6.4.60. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{2x}$.

6.4.61. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$.

6.4.62. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1 - 6x)}$.

6.4.63. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{3^x - 1}$.

6.4.64. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+7x} - 1}{x}$.

6.4.65. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2 - 2x}$.

Дополнительные задачи

Используя первое определение предела функции, найти пределы:

6.4.66. $\lim\limits_{x\to -2} (x^2 - x)$.

6.4.67. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x}{x+3}$.

6.4.68. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2 + 27}$.

6.4.69. $\lim\limits_{x\to a} (x + 2a)^5$.

Используя второе определение предела функции, доказать, что:

6.4.70. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0.$

6.4.71. $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0.$

6.4.72. $\lim\limits_{x\to 1} x^3 = 1.$

6.4.73. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{x-1} = 2.$

Доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0, если:

6.4.74. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0.$

6.4.75. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное} \end{cases}$

(функция Дирихле), $x_0 = \dfrac{1}{2}.$

Найти пределы:

6.4.76. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-1}{2x+5}.$

6.4.77. $\lim\limits_{x\to 2{,}5}\sqrt{4x-1}.$

6.4.78. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}+1}{\sqrt{x+5}}.$

6.4.79. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}-3\right).$

6.4.80. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+5x-2}{3x-1}.$

6.4.81. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}.$

6.4.82. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right).$

6.4.83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5-3x^3+x^2}{x^4+2x^2}.$

6.4.84. $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^3+4y-5}{y^3+2y^2-y-2}.$

6.4.85. $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{(x+a)^3-x^3}{a}.$

6.4.86. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-8x}{\sqrt{x+1}-3}.$

6.4.87. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{9-x}-2}{3-\sqrt{x+4}}.$

6.4.88. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$

6.4.89. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+6}-3}.$

6.4.90. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t}.$

6.4.91. $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y-1}{\sqrt[4]{y}-1}.$

6.4.92. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x+3}{x^2-3x^4}.$

6.4.93. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-x^2+3x-1}{10x^2+x}.$

6.4.94. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-3)(2x+9)}{(x^2+x+1)(3x^2-4)}.$

6.4.95. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-10x\right).$

6.4.96. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right).$

6.4.97. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{5x^2+1}-\dfrac{x^2}{5x-3}\right).$

6.4.98. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}.$

6.4.99. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}.$

6.4.100. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}.$

6.4.101. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-\sin h}{h+\sin h}.$

6.4.102. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\operatorname{ctg}\pi x.$

6.4.103. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot\operatorname{tg}2x}.$

6.4.104. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 7x}{\sin 4x}$.

6.4.105. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

6.4.106. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{4^x - 1}$.

6.4.107. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

6.4.108. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2}\right)^{x^2}$.

6.4.109. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{\sin x}$.

6.4.110. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{8 + x}{10 + x}\right)^{2x+3}$.

6.4.111. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{\sin 2x}$.

6.4.112. $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)^{t}$.

6.4.113. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

6.4.114. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x - 3}\right)$.

Найти односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0:

6.4.115. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$.

6.4.116. $f(x) = \dfrac{1}{\{x\}}$, где $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x; $x_0 = 1$.

6.4.117. Доказать эквивалентность следующих функций при $x \to 0$:

1) $e^{kx} - 1 \sim kx$;

2) $\arcsin \alpha x \sim \alpha x$;

3) $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$;

4) $\ln\cos x \sim -\dfrac{x^2}{2}$.

Найти пределы, заменяя бесконечно малые эквивалентными:

6.4.118. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x^2)}{\operatorname{tg}^2 8x}$.

6.4.119. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin x} - 1}{x}$.

6.4.120. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \arcsin\sqrt{x}}{\operatorname{arctg}^{3/2} 2x}$.

6.4.121. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

6.4.122. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x}$.

6.4.123. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x\sin x} - 1}{x^2}$.

Более сложные задачи

6.4.124. Верно ли, что:

1) если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет предела в этой точке, то функция $f(x) + g(x)$ имеет предел в точке x_0;

2) если функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют предела в точке x_0, то функция $f(x) + g(x)$ также не имеет предела в этой точке?

6.4.125. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ не существует.

18 – 2361