МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 4

Тема первая

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова, § 89—126, 149—169.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Доказательство тригонометрических тождеств

При доказательстве тригонометрических тождеств обычно используются следующие способы:

1) выражение, стоящее в одной части равенства, с помощью тождественных преобразований приводят к выражению, стоящему в другой части равенства;

2) выражение, стоящее в левой и правой части тождества, с помощью тождественных преобразований приводят к одному и тому же виду;

3) доказывают, что разность между левой и правой частями данного тождества равна нулю.

При доказательстве тригонометрических тождеств используют основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, формулы приведения, формулы сложения и вычитания, формулы для двойного и половинного аргумента, формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, а также числовые значения тригонометрических функций для некоторых углов. Нижеуказанные формулы приводятся для справок.

Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};\ \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha;\ 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Формулами приведения называются формулы, выражающие тригонометрические функции углов $-\alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ через тригонометрические функции угла α, где α произвольный угол.

Углы \ Функции		$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$-\alpha$	$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$90° - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$90° + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi - \alpha$	$180° - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi + \alpha$	$180° + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$270° - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$270° + \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi - \alpha$	$360° - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$2\pi + \alpha$	$360° + \alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

При пользовании формулами приведения можно руководствоваться следующим правилом: если угол α откладывается от горизонтальной оси, то наименование функции не изменяется; если же угол α откладывается от вертикальной оси, то наименование функции меняется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и т. д.); чтобы определить знак, с которым следует взять тригонометрическую функцию в правой части формулы, достаточно, считая угол α острым, определить знак выражения, стоящего в левой части формулы.

Формулы сложения и вычитания:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулы двойного угла:

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Соотношения между тригонометрическими функциями половинного угла и косинусов целого угла выражаются следующими формулами:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha;$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного угла:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

(приведение к виду, удобному для логарифмирования):

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Пример 1. Доказать тождество: $\dfrac{\operatorname{cosec}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=1.$

Решение. Преобразуем левую часть равенства, используя при этом основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, а также формулы двойного угла.

$$\frac{\operatorname{cosec}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\dfrac{1}{\sin2\alpha}+\dfrac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha(1+\cos2\alpha)}{\cos\alpha\cdot\sin2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot 2\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}=1.$$

Пример 2. Доказать тождество:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha}{\sec\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=3.$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha}{\sec\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}}{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}}=$$

$$=\frac{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}}{\frac{1}{\sin 2\alpha}}=\frac{2+1}{\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sin 2\alpha}}=3.$$

Пример 3. Доказать тождество:

$$\sin\alpha\left(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$\sin\alpha\left(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\left(\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)=\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Пример 4. Доказать тождество:

$$\frac{\cos 2\varphi}{1+\sin 2\varphi}=\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi).$$

Решение. Преобразуем правую часть равенства, используя формулу тангенса разности двух углов:

$$\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\varphi}=\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}=\frac{1-\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1+\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}=$$

$$=\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}=\frac{(\cos\varphi-\sin\varphi)\ (\cos\varphi+\sin\varphi)}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}=$$

$$=\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi}=\frac{\cos2\varphi}{1+2\sin\varphi\cos\varphi}=\frac{\cos2\varphi}{1+\sin2\varphi}.$$

Пример 5. Доказать тождество:

$$\frac{\sin\varphi+\sin3\varphi+\sin5\varphi+\sin7\varphi}{\cos\varphi+\cos3\varphi+\cos5\varphi+\cos7\varphi}=\operatorname{tg}4\varphi.$$

Решение. Преобразуем левую часть, используя формулы преобразования суммы двух одноименных тригонометрических функций в произведение:

$$\frac{\sin\varphi+\sin3\varphi+\sin5\varphi+\sin7\varphi}{\cos\varphi+\cos3\varphi+\cos5\varphi+\cos7\varphi}=\frac{(\sin\varphi+\sin7\varphi)+(\sin3\varphi+\sin5\varphi)}{(\cos\varphi+\cos7\varphi)+(\cos3\varphi+\cos5\varphi)}=$$

$$\frac{2\sin4\varphi\cos3\varphi+2\sin4\varphi\cos\varphi}{2\cos4\varphi\cos3\varphi+2\cos4\varphi\cos\varphi}=\frac{2\sin4\varphi\ (\cos3\varphi+\cos\varphi)}{2\cos4\varphi\ (\cos3\varphi+\cos\varphi)}=\operatorname{tg}4\varphi.$$

Пример 6. Доказать тождество:

$$\frac{1+\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi}{\cos\varphi+2\cos^2\varphi-1}=2\cos\varphi.$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{1+\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi}{\cos\varphi+2\cos^2\varphi-1}=\frac{(1+\cos2\varphi)+(\cos\varphi+\cos3\varphi)}{\cos\varphi+2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}=$$

$$=\frac{2\cos^2\varphi+2\cos2\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi+\cos2\varphi}=\frac{2\cos\varphi(\cos\varphi+\cos2\varphi)}{\cos\varphi+\cos2\varphi}=2\cos\varphi.$$

Упражнения

Доказать следующие тождества:

1. $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

2. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}+\mathrm{tg}^2\alpha=1.$

3. $\dfrac{\mathrm{tg}\,2\alpha+\mathrm{tg}\,2\beta}{\mathrm{ctg}\,2\alpha+\mathrm{ctg}\,2\beta}=\mathrm{tg}2\alpha\cdot\mathrm{tg}2\beta.$

4. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right).$

5. $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right).$

6. $\mathrm{cosec}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}.$

7. $\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha}=\dfrac{1}{2}\sin 4\alpha.$

8. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\,\alpha-\mathrm{tg}^2\,\alpha}=\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$

9. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\sec^2 2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\mathrm{cosec}^2\,2\alpha-1}=2.$

10. $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\mathrm{tg}\alpha.$

11. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{1+\cos\alpha-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha.$

12. $\dfrac{\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha}=\mathrm{tg}5\alpha.$

13. $\left(\dfrac{\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha}+\sqrt{\mathrm{ctg}\,\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2=2\mathrm{cosec}2\alpha.$

14. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\mathrm{tg}^4\alpha.$

15. $\dfrac{\sin 4\alpha-\cos 4\alpha\cdot\mathrm{tg}\,2\alpha}{\sin 4\alpha+\cos 4\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,2\alpha}=\mathrm{tg}^2 2\alpha.$

16. $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha-2\mathrm{tg}2\alpha=4\mathrm{ctg}4\alpha.$

17. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta).$

Доказать тождество 18—20 при условии, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

18. $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma+1=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}.$