Глава 7. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

❑

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Понятие производной

⇛ Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или $f'|_{x=x_0}$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

⇛ Вычисление производной называется *дифференцированием* функции.

Таблица производных

1. $(c)' = 0$, $c = \mathrm{const}$;
2. $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$ (где $\alpha\in\mathbb{R}$); в частности, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $a>0$; в частности, $(e^x)' = e^x$;
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$; в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Основные правила дифференцирования

Пусть c — константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке x. Тогда функции $u(x)\pm v(x)$, $c\cdot u(x)$, $u(x)\cdot v(x)$ и $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x)\neq 0$) также имеют производные в этой точке, причем

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$.

Пусть теперь функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ — в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$$y'(x_0) = y'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0. Тогда существует касательная к графику этой функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, уравнение которой имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

При этом $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона этой касательной к оси Ox (рис. 80).

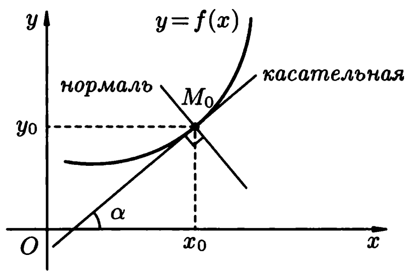

Рис. 80

⇛ Прямая, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой и имеет уравнение

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Если $f'(x_0) = 0$ (т. е. касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна и имеет уравнение $x = x_0$.

⇛ Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0. Тогда *углом между* этими *кривыми* называется угол между касательными к ним, проведенными в точке M_0.

Этот угол φ можно найти из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

Логарифмическая производная

При нахождении производных от показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$, а также других громоздких выражений, допускающих логарифмирование (произведение, частное и извлечение корня), удобно применять логарифмическую производную.

⇛ *Логарифмической производной* от функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Используя логарифмическую производную, нетрудно вывести формулу для производной показательно-степенной функции $u(x)^{v(x)}$:

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v.$$

Производная неявной функции

Пусть функция $y = y(x)$, обладающая производной в точке x, задана неявно уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

Тогда производную $y'(x)$ этой функции можно найти, продифференцировав уравнение (1.1) (при этом y считается функцией от x) и разрешая затем полученное уравнение относительно y'.

Производные высших порядков

⇛ Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ называется также *производной первого порядка*. В свою очередь производная от функции $f'(x)$ называется *производной второго порядка* от функции $f(x)$ (или второй производной) и обозначается $f''(x)$.

Аналогично определяются *производная третьего порядка* (или *третья производная*), обозначаемая $f'''(x)$ и т. д.

Производная n-го порядка обозначается $f^{(n)}(x)$.

Производная функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ определена параметрически функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в точке t_0, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)} \quad \text{или} \quad y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}.$$

Вторая производная $y''(x)$ находится по формуле

$$y_{xx}'' = \frac{y_t'' \cdot x_t' - x_t'' \cdot y_t'}{(x_t')^3}.$$

7.1.1. Пользуясь определением, найти производную функции $y=f(x)$:
1) $y = 3x^2$;
2) $y = \sin x$.

○ 1) Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда соответствующее приращение Δy функции будет иметь вид

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 =$$
$$= 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) = 3\Delta x(2x + \Delta x).$$

Отсюда находим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке x при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 3 \lim_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x) = 3\cdot 2x = 6x.$$

Таким образом, $y' = (3x^2)' = 6x$.

2) Найдем приращение Δy функции, соответствующее приращению Δx аргумента, используя формулу разности синусов:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом и непрерывностью $\cos x$. Таким образом, $y' = (\sin x)' = \cos x$. ●

Пользуясь определением, найти производные функций:

7.1.2. $y = 5x - 2$.

7.1.3. $y = x^3$.

7.1.4. $y = \sqrt{x}$.

7.1.5. $y = \frac{1}{x}$.

7.1.6. Пользуясь основными правилами дифференцирования, найти $f'(x)$, если:
1) $f(x) = \dfrac{9}{\sqrt[3]{x^2}} - 5^{x+1}$;
2) $f(x) = (x^4 - x)\cdot(3\operatorname{tg} x - 1)$.

○ 1) Преобразуем функцию к виду

$$f(x) = 9\cdot x^{-2/3} - 5\cdot 5^x.$$

Отсюда, используя таблицу производных, получим

$$f'(x) = (9\cdot x^{-2/3} - 5\cdot 5^x)' = (9\cdot x^{-2/3})' - (5\cdot 5^x)' =$$
$$= 9\cdot (x^{-2/3})' - 5\cdot (5^x)' = 9\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}-1} - 5\cdot 5^x\ln 5 =$$
$$= -6x^{-5/3} - 5^{x+1}\ln 5.$$

2) Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$f'(x) = \left[(x^4 - x)(3\operatorname{tg} x - 1)\right]' =$$
$$= (x^4 - x)'(3\operatorname{tg} x - 1) + (x^4 - x)(3\operatorname{tg} x - 1)' =$$
$$= (4x^3 - 1)(3\operatorname{tg} x - 1) + (x^4 - x)\cdot\frac{3}{\cos^2 x}.$$ ●

Найти производные указанных функций:

7.1.7. $y = x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 2x - 4$.

7.1.8. $y = ax^2 + bx + c$.

7.1.9. $y = 6x^7 + 4x^3 - \frac{1}{8}x$.

7.1.10. $y = \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}$.

7.1.11. $y = \sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}$.

7.1.12. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{2}{x^3} + \sqrt{7}\cdot x$.

7.1.13. $y = x\sqrt[4]{x} + 3\sin 1$.

7.1.14. $y = 5\cdot 2^x + \frac{3}{4}\operatorname{ctg} x$.

7.1.15. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

7.1.16. $y = -10\operatorname{arctg} x + 7\cdot e^x$.

7.1.17. $y = x^3\log_2 x$.

7.1.18. $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

7.1.19. $f(t) = \dfrac{1 + e^t}{1 - e^t}$.

7.1.20. $z = \left(\sqrt{y} + 1\right)\arcsin y$.

7.1.21. $u = \dfrac{21^v}{21^v + 1}$.

7.1.22. $f(x) = \sqrt[5]{x}\arccos x - \dfrac{\log_6 x}{x^2}$.

Найти производную данной функции в точке x_0:

7.1.23. $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$.

7.1.24. $y = x^4 + x^3 - 17^5$, $x_0 = 1$.

7.1.25. $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$.

7.1.26. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, $x_0 = 9$.

7.1.27. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции y:
1) $y = \sin^2 x$;
2) $y = \ln(\operatorname{arctg} 3x)$.

○ 1) Данная функция является композицией двух имеющих производные функций $u = \sin x$ и $f(u) = u^2$. Так как $u' = \cos x$, а $f'(u) = 2u$, то с учетом правила дифференцирования сложной функции получим:

$$y'(x) = (u^2)'_x = 2u \cdot u' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

2) Функция $\ln(\operatorname{arctg} 3x)$ — композиция функций $u=\operatorname{arctg} 3x$ и $f(u) = \ln u$, откуда

$$y'(x) = (\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot (\operatorname{arctg} 3x)'.$$

Функция $\operatorname{arctg} 3x$, в свою очередь, является композицией двух функций $v = 3x$ и $g(v) = \operatorname{arctg} v$, поэтому для нахождения ее производной нам придется еще раз применить правило дифференцирования сложной функции:

$$(\operatorname{arctg} 3x)' = (\operatorname{arctg} v)'_x = \frac{1}{1+v^2} \cdot v' = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}.$$

Отсюда окончательно

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot (\operatorname{arctg} 3x)' = \frac{3}{(1+9x^2)\operatorname{arctg} 3x}.$$ ●

Найти производные функций:

7.1.28. $y = \cos 5x$.

7.1.29. $y = 7^{3x-1}$.

7.1.30. $y = \cos^3 x$.

7.1.31. $y = (x+1)^{100}$.

7.1.32. $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

7.1.33. $y = \arcsin \sqrt{x}$.

7.1.34. $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

7.1.35. $y = \ln \sin x$.

7.1.36. $y = e^{\operatorname{ctg} x}$.

7.1.37. $y = \arccos(e^x)$.

7.1.38. $y = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x}$.

7.1.39. $y = \sin^9\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

7.1.40. $y = \sqrt[3]{(1-3x)^2}$.

7.1.41. $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

7.1.42. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}$.

7.1.43. $y = (1+\operatorname{tg}^2 3x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

7.1.44. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

7.1.45. $y=\operatorname{tg} 4x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 4x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 4x$.

7.1.46. $y = x^3\cdot\sin(\cos x)$.

7.1.47. $y = 3^{x^2}\cdot\sqrt{x^3-5x}$.

7.1.48. $y = \log_6 \sin 4x$.

7.1.49. $y = \cos\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

7.1.50. $y = \ln\dfrac{(x+1)(x+3)^3}{(x+2)^3(x+4)}$.

7.1.51. $y=\operatorname{arctg}(x-2)+\dfrac{x-3}{x^2-4x+5}$.

7.1.52. $y = \sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}$.

7.1.53. $y = e^{\operatorname{sh}^2 5x}$.

7.1.54. $y = \dfrac{x+e^{3x}}{x-e^{3x}}$.

7.1.55. $y = \arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$.

7.1.56. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.

7.1.57. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{ctg} x+1}+\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{tg} x+1}$.

7.1.58. Используя логарифмическую производную, найти производные функций:

1) $y = x^{\sin x}$;

2) $y = \dfrac{(x-1)^3\cdot\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

◔ 1) Прологарифмируем обе части равенства $y = x^{\sin x}$. Тогда $\ln y = \ln x^{\sin x}$, т. е. $\ln y = \sin x\cdot\ln x$. Теперь продифференцируем последнее равенство, при этом в левой части используем производную сложной функции, а в правой — производную произведения: $(\ln y)' = (\sin x\cdot\ln x)'$, т. е. $\frac{y'}{y} = (\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)'$ или $\frac{y'}{y} = \cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$.

Отсюда $y' = y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$ или, учитывая, что $y = x^{\sin x}$,

$$y' = x^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

2) Непосредственное дифференцирование данной дроби привело бы к громоздким вычислениям, зато применение логарифмической производной позволяет найти ответ без труда:

$$\ln y = \ln\frac{(x-1)^3(x+2)^{1/2}}{(x+1)^{2/3}}.$$

Отсюда, используя формулы для логарифма произведения, частного и степени, получим:

$$\ln y = \ln(x-1)^3+\ln(x+2)^{1/2}-\ln(x+1)^{2/3},$$

т. е.

$$\ln y = 3\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)-\frac{2}{3}\ln(x+1).$$

Осталось продифференцировать обе части полученного равенства:

$$(\ln y)' = \left[3\ln(x-1) + \tfrac{1}{2}\ln(x+2) - \tfrac{2}{3}\ln(x+1)\right]'$$

или

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)},$$

откуда

$$y' = y \cdot \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)}\right),$$

т. е.

$$y' = \frac{(x-1)^3\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+1)}\right). \quad \bullet$$

Найти производные:

7.1.59. $y = x^x$.

7.1.60. $y = x^{\ln x}$.

7.1.61. $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x^2+1)(x+3)}{(x-3)^3}}$.

7.1.62. $y = \dfrac{(x^3-2)\cdot\sqrt[3]{(x-1)}}{(x+5)^4}$.

7.1.63. $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

7.1.64. $y = \dfrac{(1-x^2)\cdot\cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}}$.

7.1.65. Найти производную неявно заданной функции y:

$$x^3 + y^3 = \sin(x-2y).$$

❍ Дифференцируя обе части уравнения и учитывая, что y — есть функция от x (поэтому, например, $(y^3)'_x = 3y^2\cdot y'$), получим:

$$3x^2 + 3y^2\cdot y' = \cos(x-2y)(1-2y')$$

или

$$3x^2 + 3y^2\cdot y' = \cos(x-2y) - 2y'\cdot\cos(x-2y).$$

Отсюда находим y':

$$3y^2y' + 2y'\cdot\cos(x-2y) = \cos(x-2y) - 3x^2$$

или

$$y'(3y^2 + 2\cos(x-2y)) = \cos(x-2y) - 3x^2,$$

т. е.

$$y' = \frac{\cos(x-2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x-2y)}. \quad \bullet$$

Найти производную функции y, заданной неявно:

7.1.66. $e^{xy} - \cos(x^2+y^2) = 0$.

7.1.67. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

7.1.68. $x^2 + y^2 = \ln\dfrac{y}{x} + 7$.

7.1.69. $x\sin y + y\sin x = 0$.

7.1.70. $x^4 - y^4 = x^2y^2$.

7.1.71. $e^y = e - xy$. Найти y' в точке $(0; 1)$.

7.1.72. Найти производную $y'(x)$ от следующей функции, заданной параметрически:

$$x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t.$$

◐ Производная функции $y(x)$ находится по формуле $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, откуда в нашем случае

$$y'(x) = \frac{(3\sin t)'}{(2\cos t)'} = -\frac{3\cos t}{2\sin t} = -1{,}5\operatorname{ctg} t. \qquad \bullet$$

Найти $y'(x)$ для заданных параметрически функций $y = y(x)$:

7.1.73. $x = t^3 + t$, $y = t^2 + t + 1$.

7.1.74. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

7.1.75. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$.

7.1.76. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

7.1.77. $x = 5\operatorname{ch} t$, $y = 4\operatorname{sh} t$.

7.1.78. **1)** Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y^2 = 4x$ в точке $M(1; 2)$.

2) Найти точки, в которых касательная к графику гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ параллельна прямой $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$.

3) Найти угол, под которым пересекаются кривые

$$y = \frac{8}{x} \quad \text{и} \quad x^2 - y^2 = 12.$$

◐ 1) Найдем $y'(x)$ как производную неявной функции: $(y^2)' = (4x)'$, т. е. $2yy' = 4$, откуда $y' = \dfrac{2}{y}$. Значит, $y'(x_0) = y'(1) = 1$. Отсюда получаем уравнение касательной в точке M:

$$y - 2 = x - 1, \quad \text{т. е.} \quad y = x + 1.$$

Теперь найдем уравнение нормали:

$$y - 2 = -(x - 1), \quad \text{т. е.} \quad y = -x + 3.$$

2) Угловой коэффициент данной прямой равен $-\dfrac{1}{4}$, поэтому производная к кривой в искомой точке x_0 также равна $-\dfrac{1}{4}$:

$$y'(x_0) = -\frac{1}{4}, \quad \text{т. е.} \quad -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4},$$

откуда $x^2 = 4$, или $x = \pm 2$.

3) Сначала найдем точку пересечения кривых, для чего подставим $y = \dfrac{8}{x}$ во второе уравнение: $x^2 - \left(\dfrac{8}{x}\right)^2 = 12$, или $t - \dfrac{64}{t} = 12$, где $t = x^2$. Решая последнее уравнение, найдем

$t = 16$, откуда $x = \pm 4$, $y = \pm 2$. Таким образом, имеем 2 точки пересечения $M_1(4;2)$ и $M_2(-4;-2)$.

Найдем угол φ_1 пересечения кривых в точке M_1, предварительно вычислив $y_1'(4)$ и $y_2'(4)$ из уравнений $y_1 = \frac{8}{x}$ и $x^2 - y_2^2 = 12$:

$$y_1' = -\frac{8}{x^2} \implies y_1'(4) = -\frac{8}{16} = -0{,}5;$$

$$(x^2 - y_2^2)' = 12' \implies 2x - 2y_2 \cdot y_2' = 0 \implies$$

$$\implies y_2' = \frac{x}{y_2} \implies y_2'(4) = \frac{4}{2} = 2.$$

Теперь окончательно найдем

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_2'(4) - y_1'(4)}{1 + y_1'(4)y_2'(4)} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{1 - 1}.$$

Поскольку знаменатель дроби обратился в ноль, то это означает, что $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Аналогично находим угол $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ во второй точке пересечения данных кривых. ●

Найти уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке x_0:

7.1.79. $y = e^x$, $x_0 = 0$.

7.1.80. $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

7.1.81. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна прямой:

а) $y = 2x + 5$;

б) $y = x + \sqrt{3}$?

7.1.82. Найти углы, под которыми пересекаются кривые $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$.

7.1.83. Найти:

1) $f'''(x)$, где $f(x) = \sin 3x$;

2) y''_{xx} для функции $y = y(x)$, заданной параметрически $x = t^2$, $y = t^3$.

◐ 1) Находим первую производную:

$$f'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x.$$

Отсюда получим вторую производную —

$$f''(x) = (3\cos 3x)' = -9\sin 3x,$$

а затем и искомую третью:

$$f'''(x) = (-9\sin 3x)' = -27\cos 3x.$$

2) Воспользуемся формулой

$$y''_{xx} = \frac{x_t' \cdot y_{tt}'' - y_t' \cdot x_{tt}''}{(x_t')^3},$$

откуда

$$y''_{xx} = \frac{(t^2)' \cdot (t^3)'' - (t^3)' \cdot (t^2)''}{[(t^2)']^3} = \frac{2t \cdot 6t - 3t^2 \cdot 2}{(2t)^3} = \frac{6t^2}{8t^3} = \frac{3}{4t}. \bullet$$

Найти производные указанных порядков для следующих функций:

7.1.84. $y = \operatorname{tg} 3x$, $y'' =?$

7.1.85. $y = -x \cdot \cos x$, $y'' =?$

7.1.86. $y = \ln^2 x$, $y'' =?$

7.1.87. $y = x \cdot \ln x$, $y''' =?$

7.1.88. $y = e^{2x}$, $y^{(V)} =?$

7.1.89. $y = \ln(1+x)$, $y^{(n)} =?$

7.1.90. $x = t^3$, $y = t^2$, $y''_{xx} =?$

7.1.91. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $y''_{xx} =?$

Дополнительные задачи

Пользуясь определением, найти производные следующих функций:

7.1.92. $y = -4.$

7.1.93. $y = e^x.$

7.1.94. $y = 5t^3 - 2t + 7.$

7.1.95. $f(h) = \frac{3}{h^2+1}.$

Найти $f'(x_0)$ по определению производной:

7.1.96. $f(x) = 4x^2 - 3x + 8$, $x_0 = 1.$

7.1.97. $f(x) = \cos 2x$, $x_0 = 0.$

Найти производные функций:

7.1.98. $y = 5\sqrt{x} + \frac{13}{x^4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$

7.1.99. $y = 10x^6 - \frac{4}{x} + 3\sqrt[5]{x}.$

7.1.100. $y = 2\operatorname{ctg} x - 3\sin x.$

7.1.101. $y = \operatorname{arctg} x + 7 \cdot e^x.$

7.1.102. $y = 19^x - 8\arcsin x.$

7.1.103. $y = (x^2-1)(x^3+x).$

7.1.104. $\varphi(\alpha) = 3\arcsin\alpha - 4\arccos\alpha + 14\sqrt[7]{\alpha}.$

7.1.105. $f(t) = \frac{t}{1-t^2}.$

7.1.106. $y = 3\sin^2 x - \lg x + 3\cos^2 x.$

7.1.107. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{3^x} + 4^x.$

7.1.108. $y = \frac{e^x + \ln x}{e^x - \ln x}.$

7.1.109. $y = (x+1)(x+2)(x+3).$

7.1.110. $y = (x^2-1)(x^2-3)(x^2-5).$

7.1.111. $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4}.$

7.1.112. $y = \frac{3}{x^4+2}.$

7.1.113. $y = \sqrt{x}(x^5 + \sqrt{x} - 2).$

7.1.114. $y = \frac{3^{2x}}{2^{2x}} - \sqrt[5]{x} \cdot \ln x^5.$

Найти производную данной функции в точке x_0:

7.1.115. $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$, $x_0 = 1$.

7.1.116. $f(x) = 4x + 6\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$.

7.1.117. $f(x) = x^2 + 3\sin x - \pi x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

7.1.118. $f(x) = e^{x+1} \cdot (4x-5)$, $x_0 = \ln 2$.

Найти производные функций:

7.1.119. $y = 10^{x^2+1}$.

7.1.120. $y = \operatorname{tg} 4x$.

7.1.121. $y = \operatorname{ch}^4 \frac{x}{2}$.

7.1.122. $y = \ln(5x^3 - x)$.

7.1.123. $y = \cos^4 x - \sin^4 x$.

7.1.124. $y = \sqrt{4-7x^2}$.

7.1.125. $y = \sqrt[5]{1+\operatorname{ctg} 10x}$.

7.1.126. $y = (\sin 3x - \cos 3x)^2$.

7.1.127. $x = \ln^4 \sin 3t$.

7.1.128. $f(h) = \operatorname{arctg} \sqrt{h}$.

7.1.129. $y = \frac{1}{\arcsin x}$.

7.1.130. $y = \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

7.1.131. $y = \frac{x \ln x}{x-1}$.

7.1.132. $y = \operatorname{sh}(\ln(\operatorname{tg} 2x))$.

7.1.133. $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

7.1.134. $y = 3^{\sin^3 2x + 4\sin 2x}$.

7.1.135. $y = e^{-\ln \frac{x+2}{x-3}} - \frac{x-3}{x+2}$.

7.1.136. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$.

7.1.137. $y = x \cdot 2^{\sqrt{x}}$.

7.1.138. $y = 5^{(1/\log_5 x)}$.

7.1.139. $y = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3}$.

7.1.140. $y = \ln(e^{2x}+1) - 2\operatorname{arctg} e^x$.

7.1.141. $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}}$.

7.1.142. $y = \frac{\operatorname{tg} 3x + \ln \cos^2 3x}{3}$.

7.1.143. $y = \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

7.1.144. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x}{2(1+x^2)}$.

7.1.145. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

7.1.146. $y = 14 \arcsin \frac{x+1}{2} - \frac{(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}}{2}$.

7.1.147. $y = \frac{\ln(x^2+2)}{2} + \frac{2-x}{4(x^2+2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Найти производные функций, используя логарифмическую производную:

7.1.148. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

7.1.149. $y = (x^2+1)^{\sqrt{x}}$.

7.1.150. $y = \dfrac{e^x \cdot (x+4)^4}{\sqrt{5x-1}}$.

7.1.151. $y = \dfrac{x^3\sqrt{x-10}}{(x^2+4)^3 \cdot \sqrt[7]{x-6}}$.

7.1.152. $y = 3^x \cdot x^5 \cdot \sqrt{x^4+x}$.

7.1.153. $f(t) = t^{\frac{1}{\ln t}}$.

Найти производную функции y, заданной неявно:

7.1.154. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$.

7.1.155. $x^2 + 3y^2 - 4xy + 10 = 0$.

7.1.156. $\arcsin \dfrac{x}{y} = y \ln x$.

7.1.157. $\operatorname{arctg} y = x^2 y$.

7.1.158. $x^y \cdot y^x = 1$.

7.1.159. $x^2 + y^2 = 4$. Найти y' в точке $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Найти $y'(x)$ для заданных параметрически функций $y = y(x)$:

7.1.160. $x = t^3$, $y = 3t$.

7.1.161. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

7.1.162. $x = \dfrac{t+1}{t}$, $y = \dfrac{t-1}{t}$.

7.1.163. $x = t - \operatorname{arctg} t$, $y = \dfrac{t^3}{3} + 1$.

Найти уравнения касательной и нормали к данной кривой в данной точке:

7.1.164. $y = x^3$, $x_0 = -2$.

7.1.165. $x^2 + y^2 = 4$, $M_0 = (1; \sqrt{3})$.

7.1.166. $y = 2x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox.

7.1.167. $x = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = 2$.

7.1.168. В какой точке касательная к параболе $-x^2 + 4x - 6$ наклонена к оси абсцисс под углом

а) $0°$;

б) $45°$?

Найти угол между кривыми:

7.1.169. $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ и $y = -5x - 5$.

7.1.170. $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Найти производные указанных порядков для следующих функций:

7.1.171. $y = \ln \cos x$, $y'' =?$

7.1.172. $y = \sin^2 x$, $y'' =?$

7.1.173. $y = 5^x$, $y'' =?$

7.1.174. $y = \dfrac{1}{4x-1}$, $y'' =?$

7.1.175. $f(x) = xe^x$, $f'''(x) = ?$

7.1.176. $r(\varphi) = \cos\varphi$, $r^{(IV)}(\varphi) = ?$

7.1.177. $y = \ln x$, $y^{(n)} = ?$

7.1.178. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $y''_{xx} = ?$

7.1.179. $x = e^{3t}$, $y = e^{5t}$, $y''_{xx} = ?$

Более сложные задачи

7.1.180. Доказать, что:

1) производная четной функции — нечетная функция;
2) производная нечетной функции — четная функция.

7.1.181. Пусть функция $f(x)$ — периодическая с периодом T. Доказать, что $f'(x)$ (если она существует) также периодическая функция с периодом T.

7.1.182. Доказать, что функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x_0 = 0$.

7.1.183*. Построить пример функции, непрерывной на всей действительной прямой и имеющей производную всюду, кроме точек 1 и 2.

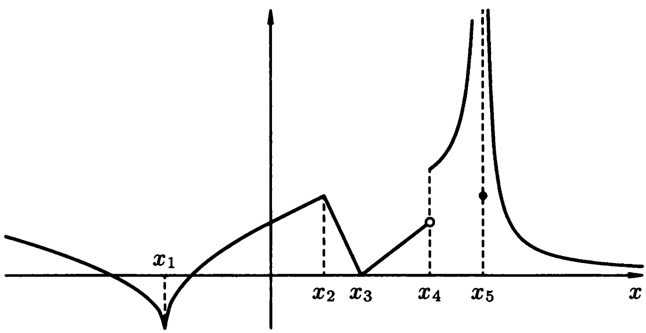

Рис. 81

7.1.184. Исходя из графика функции (рис. 81), указать точки, в которых функция не имеет производной или разрывна.

7.1.185. Дифференцируя данные тригонометрические тождества получить соответственно формулы для $\cos 2x$, $\cos 3x$ и $\cos(x + a)$, $a = \text{const}$:

1) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;
2) $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$;
3) $\sin(x + a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$.

7.1.186. Доказать, что:

1) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$;
2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$;
3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$.