19. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

20. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$.

Тема вторая

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова, § 170—173.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

n° 1. Простейшие тригонометрические уравнения и их решения

Уравнение называется тригонометрическим, если неизвестная величина находится под знаком тригонометрической функции.

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида $\sin x=m$; $\cos x=m$; $\operatorname{tg}x=m$; $\operatorname{ctg}x=m$, где m — данное действительное число.

Решением или корнем простейшего тригонометрического уравнения называется любое значение неизвестной x, которое удовлетворяет этому уравнению, то есть обращает его в тождество.

Решить тригонометрическое уравнение — это значит найти все его корни. Формула, содержащая все решения данного тригонометрического уравнения, называется общим решением этого уравнения.

Общее решение уравнения $\sin x=m\,(|m|\leqslant 1)$ выражается формулой

$$x=(-1)^k \arcsin m+\kappa\pi, \qquad (1)$$

где $\kappa=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Если $m=0$, то есть для уравнения $\sin x=0$, $x=\kappa\pi$. (1а)

Общее решение уравнения $\cos x=m\,(|m|\leqslant 1)$ выражается формулой

$$x=\pm\arccos m+2\kappa\pi, \qquad (2)$$

где $\kappa=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Если $m=0$, то есть для уравнения $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$. (2а)

Общее решение уравнения $\operatorname{tg}x=m$ выражается формулой

$$x=\operatorname{arc\,tg}m+\kappa\pi, \qquad (3)$$

где $\kappa=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Если $m=0$, то есть для уравнения $\operatorname{tg}x=0$, $x=\kappa\pi$. (3а)

Общее решение уравнения $\operatorname{ctg}x=m$ выражается формулой

$$x=\operatorname{arc\,ctg}m+\kappa\pi, \qquad (4)$$

где $\kappa=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Если $m=0$, то есть для уравнения $\operatorname{ctg}x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$. (4а)

При решении простейших тригонометрических уравнений $\sin x=m$ и $\cos x=m$ удобно пользоваться готовыми формулами для случая $m=1$ и $m=-1$.

$\sin x=1$; $\sin x=-1$; $\cos x=1$; $\cos x=-1$.

$x=\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi$; $x=2\kappa\pi$; $x=\pi+2\kappa\pi$.

Решить следующие простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\sin x=\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg}x=1$; в) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\cos x=0$.

Решение. а) Применяя формулу (1), имеем:

$$x=(-1)^k \arcsin\frac{1}{2}+\kappa\pi=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\kappa\pi.$$

б) Применяя формулу (3), имеем:

$$x=\operatorname{arc\,tg}(1)+\kappa\pi=\frac{\pi}{4}+\kappa\pi.$$

в) Применяя формулу (2), имеем:

$$x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\kappa\pi=\pm\frac{5}{6}\pi+2\kappa\pi.$$

г) Применяя формулу (4), имеем:

$$x=\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\kappa\pi=\frac{2\pi}{3}+\kappa\pi.$$

д) Применяя формулу (2а), имеем:

$$x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi.$$

Пользуясь формулами 1—4, можно найти общее решение тригонометрических уравнений, содержащих под знаком тригонометрической функции не аргумент, а некоторую линейную функцию этого аргумента.

Пример 1. Решить уравнение $\cos 3x = -\frac{1}{2}$.

Решение. Применяя формулу (2) и считая при этом, что $3x$ есть промежуточный аргумент, будем иметь:

$$3x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\kappa\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\kappa\pi.$$

Общее решение данного уравнения:

$$x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{2\pi}{9}(3\kappa \pm 1).$$

Пример 2. Решить уравнение $\operatorname{tg} 5x = -1$.

Решение. Считая $5x$ промежуточным аргументом и применяя формулу (3), будем иметь:

$$5x = \operatorname{arc\,tg}(-1) + \kappa\pi = \frac{3\pi}{4} + \kappa\pi,$$

откуда $x = \frac{3\pi}{20} + \frac{\kappa\pi}{5}$ или $x = \frac{\pi}{20}(3 + 4\kappa)$ — общее решение данного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $\sin(2x - 1) = 0$.

Решение. Считая $(2x - 1)$ промежуточным аргументом и применяя формулу (1а), имеем $2x - 1 = \kappa\pi$, откуда $x = \frac{1}{2}(\kappa\pi + 1)$ — общее решение данного уравнения.

n° 2. Уравнения вида $\sin^2 x = a$; $\cos^2 x = a$; $\operatorname{tg}^2 x = a$; $\operatorname{ctg}^2 x = a$

Функции $y = \sin^2 x$; $y = \cos^2 x$; $y = \operatorname{tg}^2 x$ и $y = \operatorname{ctg}^2 x$ являются четными функциями с периодом, равным π. Графики этих функций расположены над осью абсцисс и симметричны относительно оси ординат. Поэтому формулы общего решения тригонометрических уравнений вида $\sin^2 x = a$, $\cos^2 x = a$, $\operatorname{tg}^2 x = a$, и $\operatorname{ctg}^2 x = a$ могут быть записаны следующим образом:

для уравнения $\sin^2 x = a$ $\qquad x = \pm \arcsin\sqrt{a} + \kappa\pi$, (5)

для уравнения $\cos^2 x = a$ $\qquad x = \pm \arccos\sqrt{a} + \kappa\pi$, (6)

для уравнения $\operatorname{tg}^2 x = a$ $\qquad x = \pm \operatorname{arc\,tg}\sqrt{a} + k\pi$, (7)

для уравнения $\operatorname{ctg}^2 x = a$ $\qquad x = \pm \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{a} + k\pi$. (8)

Примеры. Решить уравнения:

1) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; 2) $\cos^2 3x = \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg}^2(5x+2) = 3$.

Решение. 1) Применяя формулу (5), имеем:

$$x = \pm \arcsin\frac{1}{2} + k\pi = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

2) Считая $3x$ промежуточным аргументом и применяя формулу (6), имеем:

$$3x = \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + k\pi = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

откуда $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$.

3) Считая $(5x+2)$ промежуточным аргументом и применяя формулу (7), имеем:

$$5x + 2 = \pm \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} + k\pi = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

откуда

$5x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi - 2$ и $x = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{k\pi - 2}{5}$ — общее решение.

n° 3. Уравнения, содержащие одну тригонометрическую функцию одного и того же аргумента

В тех случаях, когда данное тригонометрическое уравнение содержит только одну тригонометрическую функцию одного и того же аргумента, эту функцию следует принять за неизвестное и решить данное уравнение относительно этой функции. В результате будут получены простейшие тригонометрические уравнения, решения которых рассмотрены в n°1.

Пример 1. Решить уравнение: $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

Решение. Данное уравнение является квадратным уравнением относительно функции $\cos x$. Решая это квадратное уравнение, имеем:

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

откуда $(\cos x)_1 = -1$ и $(\cos x)_2 = \frac{1}{2}$.

Следовательно, имеем два простейших уравнения:

$$\cos x = -1, \qquad (*)$$

$$\cos x = \frac{1}{2}. \qquad (**)$$

Общим решением уравнения (*) будет

$$x = \pi + 2\kappa\pi = (2\kappa + 1)\pi.$$

Общим решением уравнения (**) будет $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi$.

Таким образом, данное тригонометрическое уравнение имеет решения:

$$x = (2\kappa + 1)\pi \text{ и } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi.$$

Пример 2. Решить уравнение: $\operatorname{tg}^2 2x - 4\operatorname{tg} 2x + 3 = 0$.

Решение. Данное уравнение является квадратным относительно функции $\operatorname{tg} 2x$. Решая уравнение относительно функции $\operatorname{tg} 2x$, имеем:

$$\operatorname{tg} 2x = 2 \pm \sqrt{4-3}; \quad (\operatorname{tg} 2x)_1 = 1; \quad (\operatorname{tg} 2x)_2 = 3.$$

Получили два уравнения: $\operatorname{tg} 2x = 1$ и $\operatorname{tg} 2x = 3$. По формуле (3) $n°1$ находим общее решение для каждого из этих простейших уравнений:

$$2x = \operatorname{arc\,tg} 1 + \kappa\pi = \frac{\pi}{4} + \kappa\pi \text{ и } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\kappa\pi}{2},$$

$$2x = \operatorname{arc\,tg} 3 + \kappa\pi \text{ и } x = \frac{\operatorname{arc\,tg} 3 + \kappa\pi}{2}.$$

Следовательно, данное уравнение имеет следующие решения:

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\kappa\pi}{2} \quad \text{и } x = \frac{\operatorname{arc\,tg} 3 + \kappa\pi}{2}.$$

Пример 3. Решить уравнение $2\sin^4 x - 7\sin^2 x + 3 = 0$.

Решение. Данное уравнение является квадратным относительно $\sin^2 x$. Решим его относительно $\sin^2 x$.

$$\sin^2 x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4}; \quad (\sin^2 x)_1 = \frac{1}{2} \text{ и } (\sin^2 x)_2 = 3.$$

Получили два уравнения: $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ и $\sin^2 x = 3$. Второе уравнение не имеет решений, так как $\sin^2 x$ не может быть больше 1, а первое уравнение решаем по формуле (5) $n°2$:

$$x = \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \kappa\pi = \pm \frac{\pi}{4} + \kappa\pi = \frac{\pi}{4}(4\kappa \pm 1).$$

Таким образом, данное уравнение имеет общее решение $x = \frac{\pi}{4}(4\kappa \pm 1)$.

n° 4. Уравнения, содержащие различные тригонометрические функции одного и того же аргумента

Если данное тригонометрическое уравнение является алгебраическим уравнением относительно различных тригонометрических функций одного и того же аргумента, то сначала нужно выразить все тригонометрические функции, входящие в уравнение, через одну какую-либо функцию. В результате будет получено уравнение, рассмотренное в $n°3$.

Пример 1. Решить уравнение $2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3$.

Решение. Заменив $\sin^2 x$ через $1 - \cos^2 x$, получим квадратное уравнение относительно функции $\cos x$.

$$2(1 - \cos^2 x) + 4\cos^2 x = 3;\ 2 - 2\cos^2 x + 4\cos^2 x = 3;$$

$$2\cos^2 x = 1;\ \cos^2 x = \frac{1}{2}.$$

Применяя формулу (6) $n°2$, находим общее решение полученного уравнения: $\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + \kappa\pi = \pm \frac{\pi}{4} + \kappa\pi$. Таким образом, данное уравнение имеет общее решение $x = \pm \frac{\pi}{4} + \kappa\pi$.

Пример 2. Решить уравнение $3\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$.

Решение. Заменив $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$, получим уравнение, содержащее только функцию $\sin x$.

$$3(1 - \sin^2 x) - \sin x + 1 = 0;\ 3 - 3\sin^2 x - \sin x + 1 = 0;$$

$$3\sin^2 x + \sin x - 4 = 0;\ \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6},$$

откуда $(\sin x)_1 = -\frac{4}{3}$; $(\sin x)_2 = 1$.

Мы получили два уравнения: $\sin x = -\frac{4}{3}$ и $\sin x = 1$.

Первое уравнение решений не имеет, так как $\sin x$ не может быть меньше -1, а второе уравнение имеет общее решение $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$.

Решение. Так как $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то данное уравнение можно записать так:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0 \text{ или } \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0,$$

откуда $(\operatorname{tg} x)_1 = 1$ и $(\operatorname{tg} x)_2 = 2$.

Уравнение $\operatorname{tg} x = 1$ имеет общее решение $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. (*)

Уравнение $\operatorname{tg} x = 2$ имеет общее решение

$$x = \operatorname{arc\,tg} 2 + k\pi. \qquad (**)$$

Таким образом, данное уравнение имеет решения: (*) и (**).

Пример 4. Решить уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0$.

Решение. Данное уравнение теряет смысл при $\cos x = 0$. Следовательно, при решении этого уравнения полагаем, что $\cos x \neq 0$. Так как $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$, то данное уравнение можно записать так:

$$\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{7}{\cos x} + 5 = 0; \text{ или } 3\sin^2 x - 7\cos x + 5\cos^2 x = 0.$$

(так как $\cos x$ отличен от нуля, то умножение обеих частей уравнения на $\cos^2 x$ не приведет к посторонним корням).

Выразив $\sin^2 x$ через $1 - \cos^2 x$, получим уравнение:

$$3(1 - \cos^2 x) - 7\cos x + 5\cos^2 x = 0 \quad \text{или} \quad 2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0.$$

Решая последнее уравнение имеем: $\cos x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4}$,

откуда $(\cos x)_1 = \frac{1}{2}$ и $(\cos x)_2 = 3$.

Уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ имеет решение $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Уравнение $\cos x = 3$ решений не имеет.

Следовательно, общим решением данного уравнения будет $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

n° 5. Уравнения, левая часть которых разлагается на множители, а правая часть равна нулю

В тех случаях, когда левая часть тригонометрического уравнения разлагается на отдельные множители, каждый сомножитель, содержащий неизвестное, следует приравнять нулю. В результате данное уравнение распадается на несколько уравнений, совокупность решений которых и составит решение уравнения.

Пример 1. Решить уравнение:

$$1 + \sin x \cdot \cos x - \sin x - \cos x = 0.$$

Решение. Представим левую часть данного уравнения в виде произведения двух сомножителей:

$$1 + \sin x(\cos x - 1) - \cos x = 0,$$

или

$$\sin x(\cos x - 1) - (\cos x - 1) = 0,$$

или

$$(\cos x - 1)(\sin x - 1) = 0.$$

Приравняв нулю каждый из сомножителей, получаем два простейших уравнения: $\cos x - 1 = 0$ и $\sin x - 1 = 0$.

Первое уравнение имеет решение $x = 2k\pi$, а второе $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Следовательно, данное тригонометрическое уравнение имеет решения: $x = 2k\pi$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Пример 2. Решить уравнение: $\sin x + \cos x - \operatorname{cosec} x = 0$.

Решение. Заменив $\operatorname{cosec} x$ через $\frac{1}{\sin x}$, получим уравнение

$$\sin x + \cos x - \frac{1}{\sin x} = 0. \qquad (*)$$

Умножив обе части (*) на $\sin x$, получим:

$$\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0. \qquad (**)$$

Уравнения (**) и (*) эквивалентны, то есть при умножении равенства (*) на $\sin x$ посторонние корни не появляются. Это вытекает из того, что $\sin x=0$ не удовлетворяет уравнению (**). Заменим в (**) 1 через $\sin^2 x+\cos^2 x$. Имеем:

$$\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-\sin^2 x-\cos^2 x=0;$$

$$\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=0;\ \cos x(\sin x-\cos x)=0.$$

Получаем два уравнения: $\cos x=0$ и $\sin x-\cos x=0$.

Первое уравнение имеет решение $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Для решения второго уравнения разделим обе части его на $\cos x$. В результате получим уравнение $\operatorname{tg} x-1=0$ или $\operatorname{tg} x=1$, общим решением которого будет $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. Следовательно, данное уравнение имеет решения:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ и } x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Пример 3. Решить уравнение $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$.

Решение. Левую часть уравнения разложим на множители. Имеем:

$$(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\frac{1}{2},$$

или $\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$; $1-\cos^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$; $\cos^2 x=\frac{1}{4}$.

Последнее уравнение решаем по формуле (6) $n°2$:

$$x=\pm\arccos\frac{1}{2}+k\pi=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi.$$

n° 6. Уравнения однородные относительно функции $\sin x$ и $\cos x$

Тригонометрическое уравнение называется однородным относительно функции $\sin x$ и $\cos x$, если левая часть его есть однородный многочлен относительно этих двух функций, а правая часть равна нулю. При решении однородного уравнения удобно обе части его разделить на $\cos x$ в степени, равной степени его однородности. В результате будет получено уравнение, содержащее только функцию $\operatorname{tg} x$.

Пример 1. Решить уравнение:

$$4\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x-7\cos^2 x=0.$$

Решение. В левой части данного уравнения имеется однородный многочлен второй степени относительно функции $\sin x$ и $\cos x$. Разделим обе части данного уравнения на $\cos^2 x$. Такое деление не приведет к потере корней, так как $\cos x=0$ не удовлетворяет данному уравнению. Действительно, подставив в данное уравнение $\cos x=0$, получаем, что и $\sin x=0$, но оба эти равенства несовместны, так как ни при каком значении x не могут одновременно выполняться равенства $\sin x=0$ и $\cos x=0$.

Деля на $\cos^2 x$, получим уравнение $4\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-7=0$, откуда

$$\operatorname{tg} x=\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{8}=\frac{-3\pm 11}{8};\ (\operatorname{tg} x)_1=-\frac{7}{4};\ (\operatorname{tg} x)_2=1.$$

Уравнение $\operatorname{tg} x=-\frac{7}{4}$ имеет решение

$$x=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{4}{7}\right)+k\pi. \qquad (а)$$

Уравнение $\operatorname{tg} x=1$ имеет решение

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi. \qquad (б)$$

Следовательно, общим решением данного уравнения является совокупность решений (а) и (б).

Пример 2. Решить уравнение

$$2\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x+7\cos^2 x=6.$$

Решение. В левой части данного уравнения имеется однородный многочлен второй степени относительно функции $\sin x$ и $\cos x$. Чтобы уравнение стало однородным, заменим в правой части каждую единицу равной ей суммой $\sin^2 x+\cos^2 x$; тогда уравнение примет вид:

$$2\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x+7\cos^2 x=6\sin^2 x+6\cos^2 x,$$

или

$$4\sin^2 x-3\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=0.$$

Деля обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим:

$$4\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-1=0;$$

(деление на $\cos^2 x$ не приведет к потере корней, так как $\cos x=0$ не удовлетворяет данному уравнению).

Решая квадратное уравнение относительно функции $\operatorname{tg} x$, получим:

$$(\operatorname{tg} x)_1=-\frac{1}{4} \text{ и } (\operatorname{tg} x)_2=1.$$

Полученные простейшие уравнения $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{4}$ и $\operatorname{tg} x=1$ дают соответственно решения: $x=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{4}\right)+k\pi$ и $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, которые в совокупности служат общим решениям данного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение

$$3\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x+5\sin^2 x=2.$$

Решение. Представив правую часть данного уравнения в виде суммы $2\sin^2 x+2\cos^2 x$, будем иметь:

$$3\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x+5\sin^2 x=2\sin^2 x+2\cos^2 x,$$

или
$$\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x+3\sin^2 x=0.$$

Покажем, что полученное уравнение не имеет решений. Действительно, если $3\sin^2 x$ записать в виде суммы $\sin^2 x+2\sin^2 x$, то получим уравнение

$$\cos^2 x-2\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x+2\sin^2 x=0,$$

или
$$(\cos x-\sin x)^2+2\sin^2 x=0. \qquad (*)$$

Равенство (*) невозможно, так как левая часть этого равенства всегда положительна.

n° 7. Уравнения вида $a\sin x+b\cos x=c$ и способы их решения

Пусть дано уравнение $a\sin x+b\cos x=c$. Если $c=0$, то уравнение является однородным. Если $c\neq 0$, то деля обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получаем уравнение, равносильное данному

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (*)$$

Так как сумма квадратов $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$,

то существует такой угол φ, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi \text{ и } \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi. \qquad (**)$$

Тогда уравнение (*) можно переписать так:

$$\sin x\cdot\cos\varphi+\cos x\cdot\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Или, используя формулу синуса суммы двух углов, имеем:

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если $c^2\leqslant a^2+b^2$, то последнее уравнение имеет решения:

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+k\pi-\varphi,$$

где φ определяется из формул (**).

Если $c^2>a^2+b^2$, то заданное уравнение не имеет решений.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$.

Решение. По условию $a=1$, $b=\sqrt{3}$, $c=1$.

Следовательно, $\sqrt{a^2+b^2}=2$. Деля обе части уравнения на 2, получим:

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}.$$

Положим $\frac{1}{2}=\cos\varphi$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\varphi$. Тогда имеем:

$$\sin x\cdot\cos\varphi+\cos x\cdot\sin\varphi=\frac{1}{2}, \text{ или } \sin(x+\varphi)=\frac{1}{2}.$$

Решая последнее уравнение, получим:

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+k\pi-\varphi$$

или

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi-\varphi.$$

Так как $\cos\varphi=\frac{1}{2}$ и $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Следовательно, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi-\frac{\pi}{3}$ — искомые решения.

Пример 2. Решить уравнение $3\sin x+4\cos x=5$.

Решение. Здесь $a=3$, $b=4$, $c=5$.

$\sqrt{a^2+b^2}=5$. Деля члены уравнения на 5, получим:

$$\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=1.$$

Полагая $\frac{3}{5}=\cos\varphi$ и $\frac{4}{5}=\sin\varphi$, получим уравнение:

$$\sin x\cdot\cos\varphi+\cos x\cdot\sin\varphi=1 \text{ или } \sin(x+\varphi)=1.$$

Откуда $x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Так как $\sin\varphi>0$ и $\cos\varphi>0$, то угол φ в первой четверти. Поэтому $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$. Тогда $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi-\arcsin\frac{4}{5}$ — решения данного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}$.

Решение. Здесь $a=\sqrt{3}$, $b=-1$, $c=\sqrt{2}$.

$\sqrt{a^2+b^2}=2$. Разделив обе части уравнения на 2, получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пусть $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\varphi$ и $-\frac{1}{2}=\sin\varphi$. Тогда получаем уравнение:

$$\sin x\cdot\cos\varphi+\cos x\cdot\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } \sin(x+\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Откуда $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi-\varphi$.

Так как $\sin\varphi<0$ и $\cos\varphi>0$, то угол φ в четвертой четверти.

$$\varphi=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}.$$

Следовательно, $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi+\frac{\pi}{6}$ — искомые решения.

Пример 4. Решить уравнение $3\sin x+2\cos x=4$.

Решение. Здесь $a=3$, $b=2$, $c=4$.
Так как в данном случае $c^2>a^2+b^2$, то данное уравнение решений не имеет.

п° 8. Уравнения, содержащие функции разных аргументов

Если данное тригонометрическое уравнение содержит несколько функций разных аргументов, то, применяя основные формулы тригонометрии, выражающие зависимость между тригонометрическими функциями, часто удается свести данное уравнение к уравнению, содержащему одну функцию одного аргумента.

Пример 1. Решить уравнение: $2\cos x-4\cos\frac{x}{2}+3=0$.

Решение. Данное уравнение содержит одну тригонометрическую функцию (косинус), но разных аргументов (x и $\frac{x}{2}$). Выразим $\cos x$ через $\cos\frac{x}{2}$. Так как $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$, то уравнение примет вид:

$$2\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)-4\cos\frac{x}{2}+3=0;$$

$$4\cos^2\frac{x}{2}-4\cos\frac{x}{2}+1=0.$$

Последнее уравнение можно записать так: $\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)^2=0$. Следовательно, получаем простейшее тригонометрическое уравнение $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, откуда

$$\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ и } x=\pm\frac{2\pi}{3}+4k\pi.$$

Пример 2. Решить уравнение:

$$3(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)+4\sin 2x=0.$$

Решение. Данное уравнение содержит разные тригонометрические функции от разных аргументов. Выразим функции $\operatorname{ctg}x$ и $\operatorname{tg}x$ через $\sin x$ и $\cos x$:

$$3\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)+4\sin 2x=0;\ 3\left(\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\right)+4\sin 2x=0;$$

или $$\frac{3\cos 2x}{\sin x\cdot\cos x}+4\sin 2x=0;\qquad \frac{6\cos 2x}{\sin 2x}+4\sin 2x=0;$$

$$3\cos 2x+2\sin^2 2x=0;$$

(умножение на $\sin 2x$ не приведет к посторонним корням так как те значения x, при которых $\sin 2x=0$ не удовлетворяют заданному уравнению). Выразив в полученном уравнении $\sin^2 2x$ через $1-\cos^2 2x$, получим:

$$3\cos 2x+2-2\cos^2 2x=0;\ 2\cos^2 2x-3\cos 2x-2=0;$$

$$\cos 2x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4};\ (\cos 2x)_1=-\frac{1}{2};\ (\cos 2x)_2=2.$$

Второе уравнение то есть $\cos 2x=2$, не имеет решений. Решением уравнений $\cos 2x=-\frac{1}{2}$ будет $2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\kappa\pi$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{3}+\kappa\pi$ — общее решение данного уравнения

Пример 3. Решить уравнение $\sin 5x=\sin 3x$.

Решение. Перенесем $\sin 3x$ в левую часть и применим формулу разности синусов двух углов

$$\sin 5x-\sin 3x=0;\ 2\cos\frac{5x+3x}{2}\cdot\sin\frac{5x-3x}{2}=0;$$

$$2\cos 4x\cdot\sin x=0.$$

Как видно, данное уравнение равносильно двум простейшим: $\cos 4x=0$ и $\sin x=0$. Первое уравнение дает $4x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$ и $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\kappa\pi}{4}=\frac{\pi}{8}(1+2\kappa)$. Второе уравнение дает $x=\kappa\pi$

Пример 4. Решить уравнение $\sin 3x=\cos x$.

Решение. Запишем $\cos x$ в виде $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ и тогда уравнение решается, как и в примере 3.

$$\sin 3x-\sin(\frac{\pi}{2}-x)=;\ 2\cos(x+\frac{\pi}{4})\cdot\sin(2x-\frac{\pi}{4})=0.$$

Следовательно, имеем два уравнения: $\cos(x+\frac{\pi}{4})=0$ и $\sin(2x-\frac{\pi}{4})=0$. Решая первое уравнение, имеем:

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi \text{ и } x=\frac{\pi}{4}+\kappa\pi.$$

Второе уравнение дает:

$$2x-\frac{\pi}{4}=\kappa\pi, \text{ откуда } x=\frac{\pi}{8}+\frac{\kappa\pi}{2}.$$

Пример 5. Решить уравнение:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде $(\sin 3x+\sin x)+(\sin 4x+\sin 2x)=0$. Применяя формулу суммы синусов к каждой скобке, будем иметь:

$$2\sin 2x\cdot\cos x+2\sin 3x\cdot\cos x=0,$$

или

$$\cos x(\sin 2x+\sin 3x)=0.$$

Снова заменив сумму синусов соответствующим произведением, получим:

$$\cos x\cdot 2\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0.$$

Следовательно, данное уравнение распадается на три простейших:

$$\cos x=0;\ \sin\frac{5x}{2}=0 \text{ и } \cos\frac{x}{2}=0.$$

Уравнение $\cos x=0$ дает решение: $x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$. Из второго уравнения имеем: $\frac{5x}{2}=\kappa\pi$ или $x=\frac{2\kappa\pi}{5}$. Из третьего уравнения получаем $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$ или $x=\pi(1+2\kappa)$.

Общее решение данного уравнения — совокупность решений: $x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$, $x=\frac{2\kappa\pi}{5}$ и $x=\pi(1+2\kappa)$.

Пример 6. Решить уравнение: $2\sin 3x \cdot \sin x = 1$.

Решение. Преобразуем произведение двух синусов. Так как $\sin 3x \cdot \sin x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$, то уравнение примет вид:

$$\cos 2x - \cos 4x = 1; \quad \cos 2x = 1 + \cos 4x \quad \text{или} \quad \cos 2x = 2\cos^2 2x;$$

$$\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0; \quad \cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два: $\cos 2x = 0$ и $1 - 2\cos 2x = 0$. Из первого уравнения имеем $2x = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi$ и $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\kappa\pi}{2}$. Решая второе уравнение, получим:

$$\cos 2x = \frac{1}{2}; \quad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi; \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \kappa\pi.$$

Пример 7. Решить уравнение:

$$\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x.$$

Решение. Применив формулы преобразования произведения двух косинусов в сумму, получим:

$$\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 12x),$$

откуда $\cos 4x = \cos 12x$, или $\cos 4x - \cos 12x = 0$.

Применив формулу разности двух косинусов, получим:

$$+2\sin 8x \cdot \sin 4x = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два: $\sin 8x = 0$ и $\sin 4x = 0$. Первое уравнение дает решение $x = \frac{\kappa\pi}{8}$, а второе $x = \frac{\kappa\pi}{4}$. Таким образом, $x = \frac{\kappa\pi}{8}$ — общее решение данного уравнения.

Пример 8. Решить уравнение:

$$2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на 2, получим:

$$\sin 17x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x = 0;$$

$$\text{так как } \frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3},$$

то второе и третье слагаемые последнего уравнения образуют синус суммы двух углов, то есть $\sin(\frac{\pi}{3}+5x)$.

Следовательно, получаем уравнение

$$\sin 17x+\sin(\frac{\pi}{3}+5x)=0.$$

Заменив сумму синусов соответствующим произведением получим уравнение

$$2\sin(11x+\frac{\pi}{6})\cdot\cos(6x-\frac{\pi}{6})=0,$$

которое распадается на два:

$$\sin(11x+\frac{\pi}{6})=0;\ 11x+\frac{\pi}{6}=\kappa\pi;\ x=-\frac{\pi}{66}+\frac{\kappa\pi}{11},$$

$$\cos(6x-\frac{\pi}{6})=0;\quad 6x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi;\ x=\frac{\pi}{9}+\frac{\kappa\pi}{6}.$$

Пример 9. Решить уравнение:

$$\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x).$$

Решение. $\cos 7x+\sqrt{3}\sin 7x=\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x$. Разделив обе части равенства на 2, получим:

$$\frac{1}{2}\cdot\cos 7x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 7x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 5x+\frac{1}{2}\cdot\sin 5x.$$

Так как левую часть полученного равенства можно записать в виде синуса суммы углов $\frac{\pi}{6}$ и $7x$, а правую — в виде синуса суммы углов $\frac{\pi}{3}$ и $5x$, то уравнение примет вид:

$$\sin(\frac{\pi}{6}+7x)=\sin(\frac{\pi}{3}+5x),$$

или

$$\sin(\frac{\pi}{6}+7x)-\sin(\frac{\pi}{3}+5x)=0.$$

Применив формулу разности двух синусов, получим:

$$2\cos\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

Последнее уравнение распадается на два простейших. Решая уравнение $\cos\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, получаем:

$$6x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ и } x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{6}.$$

Из второго уравнения $\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=0$ имеем: $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$.

Упражнения

Уравнения, содержащие тригонометрические функции одного и того же аргумента

Решить следующие уравнения:

1. $2\cos^2x-3\cos x+1=0$. *Отв.:* $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $x=2k\pi$.

2. $2\sin^2x+\sin x-1=0$.

   Отв.: $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

3. $\mathrm{tg}^2x-\frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}x+1=0$. *Отв.:* $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

4. $\sin^2x-2\cos^2x-1=0$. *Отв.:* $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

5. $6\cos^2x+5\sin x-7=0$.

   Отв.: $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi$; $x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+k\pi$.

6. $2\mathrm{tg}x+3\mathrm{ctg}x-5=0$.

   Отв.: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\mathrm{arctg}\frac{3}{2}+k\pi$.

7. $\sin x+\cos x=\sec x$. *Отв.:* $x=k\pi$; $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

8. $3\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = 1$. *Отв.:* $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.

9. $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Отв.: $x = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

10. $6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 1$.

Отв.: $x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

11. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 3$.

Отв.: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

12. $\operatorname{ctg} x \cdot \cos x - \operatorname{ctg} x - \cos x + 1 = 0$.

Отв.: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

13. $1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0$

Отв.: $x = 2k\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

14. $\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$.

Отв.: $x = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + 2k\pi$; $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2k\pi$.

15. $\sin x + 2\cos x = 1$.

Отв.: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2k\pi$.

16. $\sqrt{3}\cdot\sin x + \cos x = 1$. *Отв.:* $x = 2k\pi$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

17. $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$. *Отв.:* $x = \frac{\pi}{8}(4k - 1)$.

18. $\operatorname{ctg} x + 3\operatorname{tg} x - 5\operatorname{cosec} x = 0$. *Отв.:* $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

19. $\cos^4\frac{3x}{2} - \sin^4\frac{3x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Отв.:* $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$.

20. $\cos^4\frac{x}{3} + \sin^4\frac{x}{3} = \frac{5}{8}$. *Отв.:* $x = \frac{\pi}{2}(3k \pm 1)$.

Уравнения, содержащие тригонометрические функции разных аргументов

Решить следующие уравнения:

1. $\sin(x-\frac{\pi}{2})+\sin(x-\pi)=0.$ *Отв.:* $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$

2. $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x).$ *Отв.:* $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi.$

3. $\sin(x+\frac{\pi}{2})+\operatorname{ctg}(2\pi-x)=0.$ *Отв.:* $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$

4. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)+\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)=4.$ *Отв.:* $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi.$

5. $\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)+2\cos x+2=0.$ *Отв.:* $x=\pi+2k\pi.$

6. $\sec^2 x=2\operatorname{tg}^2(\pi-x).$ *Отв.:* $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi.$

7. $2\sin^2 x+5\sin(\frac{3\pi}{2}-x)-4=0.$ *Отв.:* $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi.$

8. $\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)-\cos^2 x-3\cos(\frac{\pi}{2}-x)+2=0.$

Отв.: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi.$

9. $\sin 6x=\sin 4x.$ *Отв.:* $x=k\pi;\ x=\frac{\pi}{10}(1+2k).$

10. $\cos 3x=\sin x.$ *Отв.:* $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{8}(1+4k).$

11. $\cos x+\cos 3x=\cos 2x.$ *Отв.:* $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi.$

12. $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0.$ *Отв.:* $x=\frac{k\pi}{3};\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi.$

13. $\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}4x=2.$ *Отв.:* $x=(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}.$

14. $\sin 6x-\operatorname{tg}3x=0.$ *Отв.:* $x=\frac{k\pi}{3};\ x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}.$

15. $\sin x \cdot \sin 3x + 1 = 0.$ *Отв.:* $x = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi.$

16. $\sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x.$ *Отв.:* $x = \frac{\kappa\pi}{4}.$

17. $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 9x \cdot \cos 7x.$ *Отв.:* $x = \frac{\kappa\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{24}(1+2\kappa)$

18. $\sin 6x \cdot \cos 2x = \sin 5x \cdot \cos 3x - \sin 2x.$

Отв.: $x = \frac{\kappa\pi}{3}$; $x = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi.$

19. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{\sin 4x}{4}.$

Отв.: $x = \frac{\kappa\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{8}(1+2\kappa).$

20. $\sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x.$

Отв.: $x = 2\kappa\pi$; $x = \frac{\pi}{6}(1+4\kappa).$

21. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$

Отв.: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\kappa\pi$; $x = \frac{\pi}{8}(1+4\kappa).$

22. $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x.$

Отв.: $x = \frac{\pi}{8}(1+2\kappa)$; $x = \frac{\pi}{9}(6\kappa \pm 1).$

23. $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1.$

Отв.: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\kappa\pi}{2}$; $x = (-1)^{\kappa}\frac{\pi}{42} + \frac{\kappa\pi}{7}.$

24. $\sin 2x \cdot \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \cdot \sin 4x + \cos^2 4x.$

Отв.: $x = \frac{\kappa\pi}{3}$; $x = \frac{\pi}{11}(2\kappa+1).$

25. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$

Отв.: $x = \frac{\kappa\pi}{2}$; $x = \frac{\kappa\pi}{5}.$

26. $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$ *Отв.:* $x = \frac{\kappa\pi}{2}.$

27. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x.$

Отв.: $x = \kappa\pi$; $x = -\frac{\pi}{4} + \kappa\pi.$

28. $(1+\mathrm{tg}x)\sin^2 x-3\sin x(\cos x-\sin x)=3.$

Отв.: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\kappa\pi;\ x=-\frac{\pi}{4}+\kappa\pi$

29. $\sin 2x+\mathrm{tg}x-2=0.$ *Отв.:* $x=\frac{\pi}{4}+\kappa\pi$

30. $(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x.$

Отв.: $x=2\kappa\pi;\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\kappa\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi.$

31. $\sin 3x=4\sin x\cdot\cos 2x.$ *Отв.:* $x=\kappa\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\kappa\pi.$

32. $\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x+\frac{\pi}{3})=1+\cos 2x.$

Отв.: $x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\kappa\pi.$

33. $2+\cos x=2\mathrm{tg}\frac{x}{2}.$ *Отв.:* $x=\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi.$

34. $\mathrm{tg}3x-\mathrm{tg}x=2.$ *Отв.:* $x=-\frac{\pi}{4}+\kappa\pi;\ x=\frac{\pi}{8}(1+4\kappa).$

35. $\mathrm{tg}x+2\mathrm{ctg}2x=\sin x(1+\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}).$

Отв.: $x=\frac{\pi}{4}(1+2\kappa).$

36. $2\mathrm{tg}3x-3\mathrm{tg}2x=\mathrm{tg}^2 2x\cdot\mathrm{tg}3x.$ *Отв.:* $x=\kappa\pi.$

37. $\mathrm{tg}(x-\frac{\pi}{4})\cdot\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}(x+\frac{\pi}{4})=\frac{4\cos^2 x}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}.$

Нет решений.

38. $\cos 3x\cdot\cos^3 x+\sin 3x\cdot\sin^3 x=0.$ *Отв.:* $x=\frac{\pi}{4}(1+2\kappa).$

39. $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\frac{29}{16}\cos^4 2x.$ *Отв.:* $x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\kappa\pi}{2}.$

40. $\sin(a+x)+\sin a\cdot\sin x\cdot\mathrm{tg}(a+x)=m\cdot\cos a\cdot\cos x.$

Отв.: $x=\frac{\pi}{2}+\kappa\pi;\ x=\mathrm{arctg}m-a+\kappa\pi.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 4

Первый вариант

1. Найти значения тригонометрических функций острого угла α, если:

а) $\sin\alpha=\frac{15}{17}$. *Отв.:* $\cos\alpha=\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{15}{8}$.

б) $\cos\alpha=\frac{221}{229}$. *Отв.:* $\sin\alpha=\frac{60}{229}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{60}{221}$.

в) $\operatorname{ctg}\alpha=7$. *Отв.:* $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$; $\cos\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

2. Найти значения $\sin2\alpha$, $\cos2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

Отв.: $\sin2\alpha=-0{,}96$. $\cos2\alpha=-0{,}28$, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{24}{7}$.

3. Доказать тождества:

а) $$\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

б) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

в) $$\frac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}=-\cos\alpha.$$

г) $$\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-1.$$

д) $$\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\operatorname{tg}\alpha.$$

е) $$\frac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}=\sin2\alpha.$$

ж) $$\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

з) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)$.

4. Преобразовать в произведение:

а) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$. *Отв.:* $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos(45^\circ-\frac{\alpha}{2})$.

б) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha$.

Отв.: $2\sqrt{2}\sec\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ-\alpha)$.

в) $\frac{1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha}{1+2\cos\alpha+\cos 2\alpha}$. *Отв.:* $-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

5. Решить уравнения:

а) $\sin^2 x+5\sin x+4=0$. *Отв.:* $x=-\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi$.

б) $\sin^2 x-\cos^2 x-3\sin x+2=0$. *Отв.:* $x=\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi$,

$x=(-1)^{\kappa}\frac{\pi}{6}+\kappa\pi$.

в) $3\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x=1$.

Отв.: $x=-\frac{\pi}{4}+\kappa\pi$; $x=-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\kappa\pi$.

г) $\cos 3x=\cos x$. *Отв.:* $x=\frac{\kappa\pi}{2}$.

д) $\cos 2x\cdot\sin 4x=\cos x\cdot\sin 5x$.

Отв.: $x=\kappa\pi$; $x=\frac{\pi}{6}(2\kappa+1)$.

е) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

Отв.: $x=\frac{\pi}{12}+2\kappa\pi$; $x=\frac{7\pi}{12}+2\kappa\pi$.

ж) $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\sin 7x$. *Отв.:* $x=\frac{\pi}{6}+\kappa\pi$;

$x=\frac{\pi}{18}(3\kappa+1)$.

з) $\cos^2(x+\frac{\pi}{6})+\sin^2(x-\frac{\pi}{6})=1$. *Отв.:* $x=\frac{\kappa\pi}{2}$.

и) $\operatorname{ctg}x - 2\sin 2x = 1$.

Отв.: $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

к) $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}3x$. *Отв.:* $x = \frac{k\pi}{3}$.

6. Доказать, что $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$ если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Второй вариант

1. Найти значения тригонометрических функций острого угла α, если:

а) $\sin\alpha = \frac{20}{29}$. *Отв.:* $\cos\alpha = \frac{21}{29}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{21}$.

б) $\cos\alpha = \frac{2}{7}$. *Отв.:* $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

в) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{45}{28}$. *Отв.:* $\sin\alpha = \frac{28}{53}$; $\cos\alpha = \frac{45}{53}$.

2. Найти значения $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ и $90° < \alpha < 180°$.

Отв.: $\sin 2\alpha = -0{,}96$, $\cos 2\alpha = 0{,}28$, $\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{24}{7}$.

3. Доказать тождества:

а) $$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = 1.$$

б) $$\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

в) $$\frac{\cos(90° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} - \frac{\operatorname{tg}(180° - \alpha) \cdot \cos(180° + \alpha)}{\sec(270° + \alpha)} = \cos^2\alpha.$$

г) $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \sin\alpha.$$

д) $\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$

е) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

ж) $\dfrac{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)-1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)+1}=\sin2\alpha.$

з) $\cos^4\alpha=\dfrac{1}{8}(\cos4\alpha+4\cos2\alpha+3).$

4. Преобразовать в произведение:

а) $1-\cos\alpha+\sin\alpha.$ *Отв.:* $2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}).$

б) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha.$

Отв.: $2\sqrt{2}\operatorname{ces}\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha).$

в) $\dfrac{1-2\sin\alpha-\cos2\alpha}{1+2\sin\alpha-\cos2\alpha}$. *Отв.:* $-\operatorname{tg}^2(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}).$

5. Решить уравнения:

а) $2\sin^2x+\sin x-1=0.$ *Отв.:* $x=(-1)^{\kappa}\dfrac{\pi}{6}+\kappa\pi;$

$x=-\dfrac{\pi}{2}+2\kappa\pi.$

б) $2\cos^2x+4\sin^2x=3.$ *Отв.:* $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\kappa\pi.$

в) $3\sin^2x-2\sin x\cdot\cos x-\cos^2x=2.$

Отв.: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\kappa\pi;\ x=\operatorname{arc\,tg}3+\kappa\pi.$

г) $\sin3x=\cos2x.$ *Отв.:* $x=\dfrac{\pi}{2}+2\kappa\pi;\ x=\dfrac{\pi}{10}(4\kappa+1).$

д) $\sin5x\cdot\cos3x=\sin7x\cdot\cos x.$

Отв.: $x=\dfrac{\kappa\pi}{2};\ x=\dfrac{\pi}{8}(2\kappa+1).$

е) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{3}.$

Отв.: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\kappa\pi;\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\kappa\pi.$

ж) $\sin 3x = \cos x - \sin x$. *Отв.:* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$;

$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

з) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0$. *Отв.:* $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$.

и) $4\sin x \cdot \sin 7x = 4\sin^2 4x - 1$. *Отв.:* $x = \frac{\pi}{18}(6k \pm 1)$.

к) $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

Отв: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

6. Доказать что $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$, если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Третий вариант

1. Найти значения тригонометрических функций острого угла α, если:

а) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. *Отв.:* $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$.

б) $\cos\alpha = \frac{40}{41}$. *Отв.:* $\sin\alpha = \frac{9}{41}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{40}$.

в) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$. *Отв.:* $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

2. Найти значения $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $270° < \alpha < 360°$.

Отв.: $\sin 2\alpha = -0{,}96$; $\cos 2\alpha = 0{,}28$; $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$.

3. Доказать тождества:

а) $\frac{1 - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{cosec}\alpha}{1 + \sec\alpha} = \operatorname{ctg}^3\alpha$.

б) $1 + \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

в) $\dfrac{\sin(360°-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(90°+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(270°-\alpha)}{\cos(360°+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180°+\alpha)}=1.$

г) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\alpha+\dfrac{13\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{13\pi}{2}\right)}=\cos 2\alpha.$

д) $\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$

е) $\dfrac{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{(1+\cos 2\alpha)\ (1+\cos\alpha)}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}.$

ж) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha.$

з) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right).$

4. Преобразовать в произведение:

а) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha.$ *Отв.:* $-4\cos\alpha\cdot\sin^2\dfrac{\alpha}{2}.$

б) $1-\sin\alpha+\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha.$

Отв.: $2\sqrt{2}\sec\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right).$

в) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}.$ *Отв.:* $2\cos\alpha.$

5. Решить уравнения:

а) $3\operatorname{tg}^2 x-\sqrt{3}\operatorname{tg}x=0.$ *Отв.:* $x=\kappa\pi;\ x=\dfrac{\pi}{6}+\kappa\pi.$

б) $3\cos^2 x-\sin^2 x+3\cos x=0.$ *Отв.:* $x=(2\kappa+1)\pi;$

$x=\pm\arccos\dfrac{1}{4}+2\kappa\pi.$

в) $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x=1.$

Отв.: $x=\kappa\pi;\ x=-\dfrac{\pi}{3}+\kappa\pi.$

г) $\sin 5x = \sin x$. *Отв.:* $x = \frac{\pi}{2} k$; $x = \frac{\pi}{6} (2k+1)$.

д) $\cos 2x \cdot \cos 4x = \cos 5x \cdot \cos x$. *Отв.:* $x = \frac{\pi}{3} k$.

е) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$.

Отв.: $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$; $x = \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$.

ж) $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. *Отв.:* $x = \frac{\pi}{2} k$.

з) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$. *Отв.:* $x = k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

и) $4 \cos x \cdot \sin^2 x = \cos x - \sin x$.

Отв.: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

к) $4 \operatorname{cosec} x + \sec^2 \frac{x}{2} + 2 = 0$. *Отв.:* $x = \frac{\pi}{2} (4k-1)$.

6. Доказать, что

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2},$$

если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.