§ 3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

⇛ Выражение вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{3.1}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — постоянные числа (действительные или комплексные), а x — переменная величина (также действительная или комплексная), называется *степенным рядом*. Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда*. Сокращенно степенной ряд обозначают так: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. ⇚

⇛ Будем называть степенной ряд *действительным* (соответственно, *комплексным*) *степенным рядом*, если его коэффициенты — действительные (соответственно, комплексные) числа, а переменная x принимает действительные (соответственно, комплексные) значения. ⇚

Часто рассматривают степенные ряды более общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \tag{3.2}$$

частным случаем которых при $a = 0$ являются обычные степенные ряды (3.1). С другой стороны, каждый степенной ряд вида (3.2) с помощью замены переменной $y = x - a$ сводится к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ вида (3.1).

⇛ Придавая переменной x в степенном ряде конкретное числовое значение $x = x_0$, получим числовой ряд, который сходится или расходится. Множество всех тех значений переменной, при которых данный степенной ряд сходится, называется *областью сходимости* этого ряда. ⇚

При $x = 0$ (соответственно, при $x = a$) всякий степенной ряд вида (3.1) (соответственно, вида (3.2)) сходится, поэтому область сходимости степенного ряда содержит по крайней мере одну точку.

Теорема 1.5 (Абеля). Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ сходится в точке x_0, то он абсолютно сходится в каждой точке x, для которой $|x| < |x_0|$.

Следствие 1.1. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится и при всех значениях x, для которых $|x| > |x_1|$.

⇛ *Интервалом сходимости* действительного степенного ряда вида (3.1) (соответственно, вида (3.2)) называется такой интервал $(-R, R)$ (соответственно, $(a_0 - R, a_0 + R)$), что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне отрезка $[-R, R]$ (соответственно, $[x_0-R, x_0+R]$), ряд расходится. На границах интервала сходимости, т. е. в точках $x = \pm R$ (соответственно, в точках $x = x_0 \pm R$), ряд может как сходиться, так и расходиться. Число R называется *радиусом сходимости* действительного степенного ряда. $\Lleftarrow$

В частности, R может равняться нулю — в этом случае область сходимости ряда состоит из одной точки 0 (соответственно, x_0), или $+\infty$ — в этом случае областью сходимости является вся числовая прямая (такой ряд называется еще *всюду сходящимся*).

$\Rrightarrow$ *Кругом сходимости* комплексного степенного ряда вида (3.1) (соответственно, вида (3.2)) называется такой открытый круг $|x| < R$ (соответственно, $|x-a| < R$), что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне замкнутого круга $|x| \leqslant R$ (соответственно, вне замкнутого круга $|x-a| \leqslant R$), ряд расходится. $\Lleftarrow$

В граничных точках круга сходимости — т. е. на окружности $|x| = R$ (соответственно, $|x-a| = R$) — ряд может как сходиться, так и расходиться. Число R называется *радиусом сходимости* комплексного степенного ряда. В частности, R может быть равно 0 — в этом случае вся область сходимости ряда состоит из одной точки 0 (соответственно, a), или $+\infty$ — в этом случае областью сходимости является вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$.

Интервал и круг сходимости ряда, как правило, определяют с помощью признака Даламбера или признака Коши, примененных к знакоположительному ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \quad \text{(соответственно, } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-a)^n|\text{)},$$

составленному из абсолютных величин членов исходного степенного ряда.

Для вычисления радиуса сходимости R степенного ряда применяются также формулы:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{и} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

в тех случаях, когда указанные пределы существуют.

1.3.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}$.

○ Применим признак Даламбера. Поскольку

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!(x-3)^{(n+1)-1}}{2^{(n+1)+1}} : \frac{n!(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}\right| =$$

$$\left|\frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(x-3)^n}{(x-3)^{n-1}} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}}\right| = \left|(n+1)\cdot(x-3)\cdot\frac{1}{2}\right| = \frac{|x-3|}{2}\cdot(n+1),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|}{2}\cdot(n+1) = \begin{cases} +\infty \text{ при } x-3 \neq 0,\ x \neq 3, \\ 0 \text{ при } x-3 = 0,\ x = 3. \end{cases}$$

Таким образом, ряд сходится (абсолютно) только при $x = 3$, в остальных точках числовой прямой ряд расходится. ●

1.3.2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n-1}(x+1)^n}{n^n}$.

❍ Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^{n-1}(x+1)^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|}{n} \cdot 3^{\frac{n-1}{n}} =$$

$$= |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{3^{1-\frac{1}{n}}}{n} = |x+1| \cdot 0 = 0 < 1 \quad \text{при всех } x \in (-\infty, +\infty).$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в каждой точке числовой прямой $(-\infty, +\infty)$. ●

1.3.3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

❍ Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| = |x|.$$

(Этот же результат можно получить, применяя признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} |x| = |x|$.) Отсюда следует, что при $|x| < 1$ (т. е. при $x \in (-1, 1)$) ряд сходится абсолютно, при $|x| > 1$ расходится. Таким образом, интервал $(-1, 1)$ — интервал сходимости данного ряда. Исследуем ряд на сходимость в граничных точках этого интервала, т. е. в точках $x = -1$ и $x = 1$.

При $x = -1$ получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^n + \ldots$$

Этот ряд расходится, т.к. не выполнен необходимый признак сходимости ($a_n \not\to 0$ при $n \to \infty$).

При $x = 1$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

Этот ряд расходится по той же причине, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Итак, область сходимости данного ряда — интервал $(-1, 1)$. ●

1.3.4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}$.

○ 1. Применим признак Даламбера. Учитывая, что

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-2)^{(n+1)+1}}{3^{n+1}(n+1+2)} : \frac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x-2)^{n+2}}{(x-2)^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+3}\right| = \frac{|x-2|}{3} \cdot \frac{n+2}{n+3},$$

получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|}{3}\cdot\frac{n+2}{n+3} = \frac{|x-2|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3} = \frac{|x-2|}{3}.$$

Отсюда

$$\frac{|x-2|}{3} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x-2}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5.$$

Итак, при $x \in (-1, 5)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin [-1, 5]$ — расходится. Значит, $(-1, 5)$ — интервал сходимости данного ряда. Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала, т. е. в точках $x = -1$ и $x = 5$.

2. При $x = 5$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-2)^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n+2}.$$

Применяя 2-й признак сравнения, сравниваем этот ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n+2} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\frac{2}{n}} = 3 \neq 0.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, а полученный предел не равен нулю, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3}{n+2}$ расходится.

3. При $x = -1$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1-2)^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{n+2}.$$

Этот ряд не является абсолютно сходящимся, так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3}{n+2}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится (см. пункт 2).

Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, используя признак Лейбница.

а) Очевидно, неравенство

$$a_n = \frac{3}{n+2} > \frac{3}{(n+1)+2} = a_{n+1}$$

выполнено для всех $n = 1, 2, \ldots$

б) Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+2} = 0.$$

Итак, для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{n+2}$ выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница, значит, данный ряд сходится. Так как он не является абсолютно сходящимся, то ряд сходится условно. Окончательно получим, область сходимости исходного ряда — промежуток $[-1,5)$. ●

1.3.5. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^{n+1} n \ln^3 n}$.

❍ 1. Применим признак Даламбера. Так как

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x+5)^{n+1}}{3^{(n+1)+1}(n+1)\ln^3(n+1)} : \frac{(x+5)^n}{3^{n+1} n \ln^3 n}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x+5)^{n+1}}{(x+5)^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln^3 n}{\ln^3(n+1)}\right| = \frac{|x+5|}{3} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln^3 n}{\ln^3(n+1)},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(|x+5|)}{3} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln^3}{\ln^3(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{|x+5|}{3} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^3 n}{\ln^3(n+1)} = \frac{|x+5|}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{|x+5|}{3}.$$

(При вычислении последнего предела воспользовались равенствами

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^3 n}{\ln^3(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^3 = \left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^3$$

и, далее, правилом Лопиталя.) Найдем интервал сходимости

$$\frac{|x+5|}{3} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x+5}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < x+5 < 3 \Leftrightarrow -8 < x < -2.$$

Итак, при $x \in (-8,-2)$ ряд сходится абсолютно. Исследуем сходимость ряда в точках $x=-8$ и $x=-2$.

2. При $x=-8$ получим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-8+5)^n}{3^{n+1} n \ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^{n+1} n \ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{3^{n+1} n \ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n\ln^3 n}.$$

Исследуем этот ряд на сходимость. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n\ln^3 n}.$$

Применим интегральный признак. Так как $a_n = \dfrac{1}{3n\ln^3 n}$, то

$$f(x) = \frac{1}{3x\ln^3 x}.$$

Очевидно, что $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[2, +\infty)$, т. е.

$$\forall x_1 > x_2 > 2 \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{3x_1\ln^3 x_1} < \frac{1}{3x_2\ln^3 x_2} = f(x_2).$$

Так как функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[2, +\infty)$, то для исследования данного ряда на сходимость можно применить интегральный признак.

Сначала найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{3x\ln^3 x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \frac{1}{3}\int (\ln x)^{-3} d(\ln x) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)(\ln x)^{-2} + C = -\frac{1}{6\ln^2 x} + C.$$

Отсюда

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{3x\ln^3 x} = \lim_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{dx}{3x\ln^3 x} =$$
$$= \lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{6\ln^2 x}\bigg|_2^M\right) = \lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{6\ln^2 M} + \frac{1}{6\ln^2 2}\right) = \frac{1}{6\ln^2 2}.$$

Так как несобственный интеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{3x\ln^3 x}$ сходится, то сходится и ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n\ln^3 n}$, а значит, ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n\ln^3 n}$ сходится абсолютно.

3. При $x = -2$ получим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2+5)^n}{3^{n+1} n\ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{3^{n+1} n\ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n\ln^3 n}.$$

Этот ряд сходится абсолютно (см. пункт 2).

Таким образом, область сходимости исходного ряда — промежуток $[-8, -2]$. ●

1.3.6. Найти круг сходимости комплексного степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^{n+1}(z+3i)^n}{(\sqrt{7}-3i)^n}.$$

Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(2i)^{n+1}(z+3i)^n}{(\sqrt{7}-3i)^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}|z+3i|\cdot\frac{|(2i)^{\frac{n+1}{n}}|}{|\sqrt{7}-3i|}=$$

$$=|z+3i|\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}|2i|^{1+\frac{1}{n}}}{|\sqrt{7}-3i|}=|z+3i|\cdot\frac{|2i|}{|\sqrt{7}-3i|}=\frac{|z+3i|\cdot 2}{\sqrt{(\sqrt{7})^2+(-3)^2}}=$$

$$=\frac{|z+3i|\cdot 2}{4}=\frac{|z+3i|}{2}.$$

Найдем круг сходимости ряда:

$$\frac{|z+3i|}{2}<1\Leftrightarrow|z+3i|<2.$$

Итак, в круге $|z+3i|<2$ степенной ряд сходится абсолютно. ●

Найти область сходимости ряда. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$*;*

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$*;*

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$*;*

5) для интегрального признака — первообразную для $f(x)$ *и* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$*.*

В задачах 1.3.7–1.3.14 для определения ***интервала*** *сходимости использовать признак Даламбера. В задачах 1.3.15–1.3.20 для определения* ***интервала*** *сходимости использовать признак Коши.*

1.3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

1.3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{(n+1)!}$.

1.3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

1.3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)!(x+1)^n$.

1.3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$.

1.3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-x)^{2n}}{\sqrt{n}}$.

1.3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

1.3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}$.

1.3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nx^n$.

1.3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n+1}(x-3)^n$.

1.3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

1.3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$.

1.3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^{2n}$.

1.3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n(x-2)^{2n+1}$.

1.3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$.

1.3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

1.3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n^2}}{n^n}$.

1.3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n}$.

1.3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^{4n}$.

1.3.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^{2n-2}}{n}$.

1.3.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \ln n}$.

1.3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+2}$.

1.3.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n-1} \cdot n^2}$.

1.3.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n-1)}}{n! 2^n}$.

1.3.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{4^n n \ln^2 n}$.

1.3.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n-1}}{3^n}$.

1.3.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n (x+1)^n$.

1.3.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(x+7)^{n+1}}{3^{n-1}}$.

1.3.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{2^{n+1}(n+2)^{n-1}}$.

1.3.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)!}$.

1.3.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)^n (6-x)^{n+1} \cdot 2^{n-1}$.

Найти круг сходимости ряда. Указать применяемые признаки.

1.3.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(z-i)^n$.

1.3.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^{2n}}{n^2}$.

1.3.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n^n}$.

1.3.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+i}\right)^n (z-i)^n$.

1.3.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n i^n}$.

Дополнительные задания

Найти область сходимости ряда. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$;

5) для интегрального признака — первообразную для $f(x)$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

В задачах 1.3.43–1.3.46 для определения интервала сходимости использовать признак Даламбера.

В задачах 1.3.47–1.3.49 для определения интервала сходимости использовать признак Коши.

1.3.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

1.3.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{5n}}{2n-1}$.

1.3.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^{n+1}}{2^{n-1}}$.

1.3.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}x^{n+2}}{n!}$.

1.3.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(2x+3)^{n-1}}{n^n}$.

1.3.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n(x+1)^{n+1}}{3^{n-1}}$.

1.3.49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n^n}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

1.3.50. Может ли интервал сходимости ряда $\sum a_n x^n$ быть таким:
а) $(-2;0)$; **б)** $(0;2)$;
в) $(-3;1)$; **г)** $(-\infty;\infty)$;
д) $(-3;3)$.

1.3.51. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-3)^n$ в точке $x=2$ расходится. Что можно сказать о сходимости ряда в точке:
а) $x=5$; **б)** $x=3{,}5$;
в) $x=4$.

1.3.52. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-3)^n$ в точке $x=2$ сходится абсолютно. Что можно сказать о сходимости ряда в точке:
а) $x=5$; **б)** $x=3{,}5$;
в) $x=4$.

1.3.53. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-(1+i))^n$ в точке $z=i$ сходится условно. Что можно сказать о сходимости ряда в точке:
а) $z=1$; **б)** $z=0$;
в) $z=\frac{1+i}{2}$.

1.3.54. Существует ли степенной ряд, для которого верно следующее утверждение:

а) на обоих концах интервала сходимости ряд расходится;

б) на одном конце интервала сходимости ряд сходится условно, а на другом — сходится абсолютно;

в) на обоих концах интервала сходимости ряд сходится абсолютно;

г) на одном конце интервала сходимости ряд сходится условно, а на другом — расходится;

д) на одном конце интервала сходимости ряд сходиться абсолютно, а на другом — расходится.