Тема 3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Литература: *Н. С. Пискунов.* Дифференциальное и интегральное исчисления (любое издание), гл. XIV.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется двойным интегралом от функции двух переменных по данной области? Укажите геометрическое толкование двойного интеграла. Сформулируйте теорему существования двойного интеграла.
2. Перечислите основные свойства двойного интеграла.
3. Укажите способы вычисления двойного интеграла в прямоугольной системе координат, в полярных координатах.
4. Что называется тройным интегралом от функции трех переменных по данной области? Перечислите основные свойства тройного интеграла.
5. Укажите способы вычисления тройного интеграла в прямоугольной системе координат, в цилиндрической системе координат.
6. Напишите формулы для вычисления координат центра тяжести плоских фигур с помощью двойного интеграла.
7. Напишите формулы для определения координат центра тяжести тела с помощью тройного интеграла.

§ 16. ЗАДАЧА ОБ ОБЪЕМЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Тело, ограниченное снизу плоскостью xOy, сверху поверхностью $z=f(x, y)$ и с боков цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, называется цилиндрическим телом или цилиндроидом.

Задача. Вычислить объем V цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$, снизу областью D, сбоку — цилиндрической поверхностью, для которой направляющей служит контур замкнутой области D.

Решение. Разобьем основание D на n произвольных частей (площадок) Δs_1, Δs_2, Δs_3, ... Δs_n, где Δs_i выражает площадь соответствующей площадки (рис. 9). Если для каж-

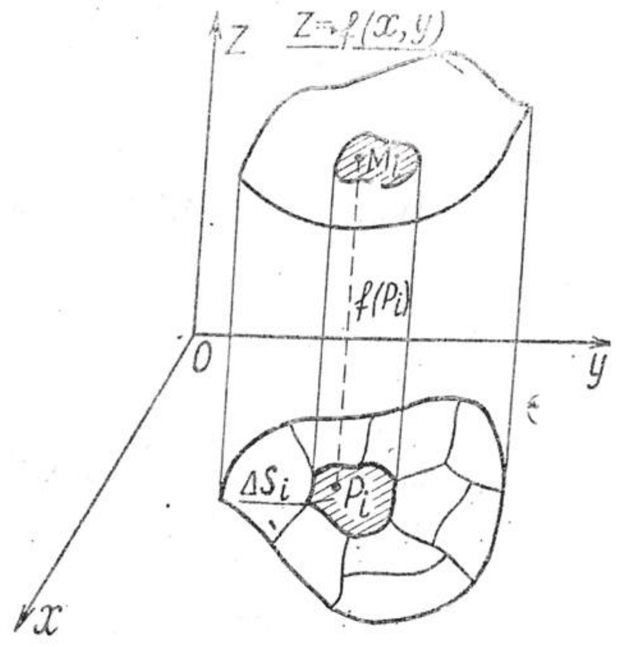


Рис. 9.

дой площадки выделить цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей служит контур этой площадки, то в результате данное тело разобьется на n частей (цилиндрических столбиков). В каждой из площадок Δs_i выберем произвольно (внутри или на границе) некоторую точку P_i; тогда произведение $f(P_i) \cdot \Delta s_i$ будет приближенно выражать объем i-го столбика, а сумма таких объемов

$$f(P_1) \cdot \Delta s_1 + f(P_2) \cdot \Delta s_2 + \ldots f(P_n) \cdot \Delta s_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta s_i \qquad (1)$$

приближенно равна искомому объему V, то есть

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta s_i.$$

Назовем наибольшее расстояние между точками, принадлежащими площадке Δs_i, **диаметром** и обозначим его через d_i. За величину объема V данного цилиндрического тела принимают тот предел, к которому стремится сумма (1) при $n \to \infty$ и одновременном стремлении к нулю наибольшего диаметра площадок ($\max d_i$).

Таким образом,

$$V = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta s_i$$

или

$$V = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i. \tag{2}$$

Разнообразные задачи приводят к необходимости отыскания пределов вида (2). Эти задачи приводят к понятию двойного интеграла.

§ 17. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ КАК ПРЕДЕЛ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ

Пусть $f(x, y)$ непрерывная функция двух переменных в некоторой замкнутой области D. Разобьем область D на n частей

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \ldots \Delta s_n$$

и в каждой замкнутой области Δs_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$. Умножим значение функции $f(x, y)$ в точке P_i на площадь области Δs_i и составим следующую сумму:

$$f(P_1) \cdot \Delta s_1 + f(P_2) \cdot \Delta s_2 + \ldots f(P_n) \cdot \Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta s_i. \tag{3}$$

Сумма (3) называется n-й *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ в области D. Для функции $f(x, y)$ в области D можно составить бесчисленное множество интегральных сумм вида (3), так как последняя зависит от способа разбиения на элементарные области Δs_i и от выбора соответствующих точек P_i в пределах каждой такой элементарной области Δs_i.

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы (3) при условии, что $n \to \infty$, а $\max d_i \to 0$.

$$\iint_D f(x, y)\, ds = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i. \tag{4}$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то предел (4) существует и не зависит ни от способов разбиения области D на элементарные области Δs_i, ни от выбора точек $P_i(x_i, y_i)$ в пределах каждой области.

Если предел (4) существует, то функция $f(x, y)$ называется интегрируемой в области D. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)ds$ функцию $f(x, y)$ называют подинтегральной функцией, а D — областью интегрирования.

§ 18. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Свойство 1. Двойной интеграл от суммы двух функций по области D равен сумме двойных интегралов по области D от каждой из функций в отдельности

$$\iint\limits_D [f(x, y)+\varphi(x, y)]ds=\iint\limits_D f(x, y)ds+\iint\limits_D \varphi(x, y)ds.$$

Свойство 2. Постоянный множитель A можно вынести за знак двойного интеграла

$$\iint\limits_D Af(x, y)ds=A\iint\limits_D f(x, y)ds.$$

Свойство 3. Если область интегрирования D разбить на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x, y)ds=\iint\limits_{D_1} f(x, y)ds+\iint\limits_{D_2} f(x, y)ds.$$

Свойство 4. Если m есть наименьшее значение и M — наибольшее значение функции $f(x, y)$ в области D, то

$$m\cdot S\leqslant\iint\limits_D f(x, y)ds\leqslant M\cdot S,$$

где S — площадь области D.

Свойство 5 (теорема о среднем). Двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)ds$ равен произведению площади S области D на значение подинтегральной функции в некоторой точке области интегрирования

$$\iint\limits_D f(x, y)ds=f(x_{ср}, y_{ср})\cdot S. \qquad (*)$$

Значение $f(x_{ср}, y_{ср})$, определяемое равенством (*), называется средним значением функции $f(x, y)$ в области D.

Теорема о среднем имеет следующий геометрический смысл: объем цилиндрического тела равен объему прямого цилиндра с тем же основанием D и с высотой, равной одной из аппликат точек поверхности $z=f(x, y)$; верхнее основание этого цилиндра параллельно нижнему.

§ 19. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

В прямоугольной системе координат элемент площади ds можно записать в виде произведения $dx \cdot dy$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)\,ds = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Чтобы вычислить двойной интеграл (1), будем рассматривать его как число, выражающее объем соответствующего цилиндрического тела с основанием D, которое ограничено сверху поверхностью $z=f(x, y)$. Рассмотрим сначала частный случай: пусть область D есть прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат (рис. 10).

Известно, что объем тела с помощью определенного интеграла можно найти по формуле

$$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx, \tag{2}$$

где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, а $x=a$ и $x=b$ — уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело.

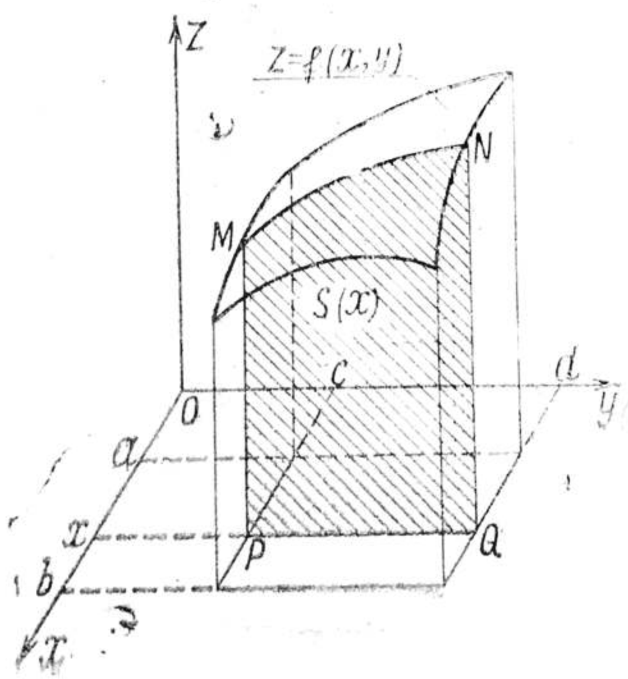


Рис. 10.

Как видно из рис. 10, площадь сечения $S(x)$ равна площади криволинейной трапеции $PMNQ$, которая ограничена сверху кривой MN. Площадь этой трапеции можно найти по формуле

$$S(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy, \tag{3}$$

где подинтегральную функцию $f(x, y)$ следует рассматривать как функцию одной только переменной y (x в этом случае считается постоянной). Подставив (3) в (2), получим

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Так как V можно заменить двойным интегралом (1), то получаем

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx. \tag{4}$$

С другой стороны, объем того же тела можно найти по формуле

$$V = \int_c^d S(y)\,dy, \tag{5}$$

где $S(y)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси ординат, а $y=c$ и $y=d$ — уравнения плоскостей,

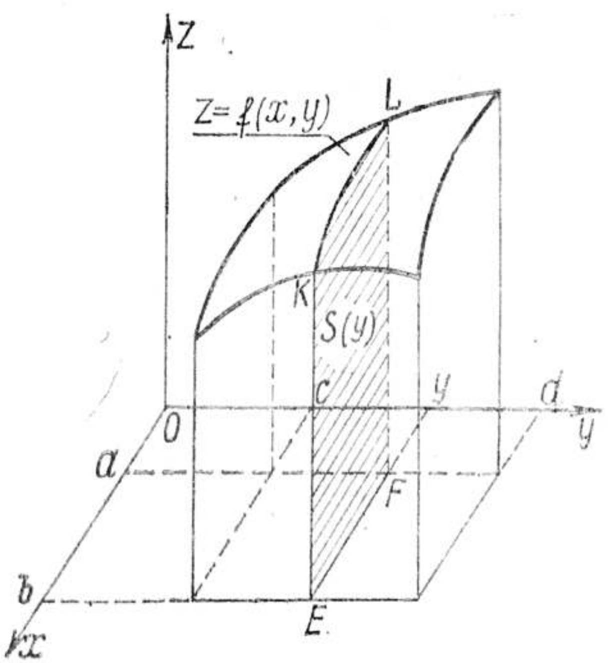


Рис. 11.

ограничивающих данное тело. Как видно (рис. 11), площадь сечения $S(y)$ равна площади криволинейной трапеции $EKLF$, которая ограничена сверху кривой KL. Площадь этой трапеции можно найти по формуле

$$S(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{6}$$

где подинтегральную функцию $f(x, y)$ следует рассматривать как функцию одной только x (y в этом случае считается постоянной).

Подставив (6) в (5) и заменяя объем V двойным интегралом (1), получим

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x, y)\,dx\right)dy. \tag{7}$$

Таким образом, данный двойной интеграл можно вычислить по формуле (4), если внутренний интеграл интегрировать по переменной y, а внешний по переменной х. С другой стороны, данный двойной интеграл можно вычислить по формуле (7), если внутренний интеграл интегрировать по переменной x, а внешний по переменной y. Итак,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{8}$$

Формула (8) показывает, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов. Интегралы в формулах (4) и (7) называются двукратными. Формула (8) позволяет двойной интеграл привести к двукратному.

133. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (10-x^2-y^2)\,dx\,dy$, если область D есть прямоугольник, стороны которого определены уравнениями $x=1; x=2; y=0; y=2$ (рис. 12).

Решение. Применяем формулу (4).

$$\iint\limits_D (10-x^2-y^2)\,dx\,dy=\int_1^2\left(\int_0^2 (10-x^2-y^2)\,dy\right)dx.$$

Вычислим внутренний интеграл; при интегрировании считаем x постоянной величиной

$$\int_0^2 (10-x^2-y^2)\,dy=\left[10y-x^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2=20-2x^2-\frac{8}{3}=\frac{52}{3}-2x^2.$$

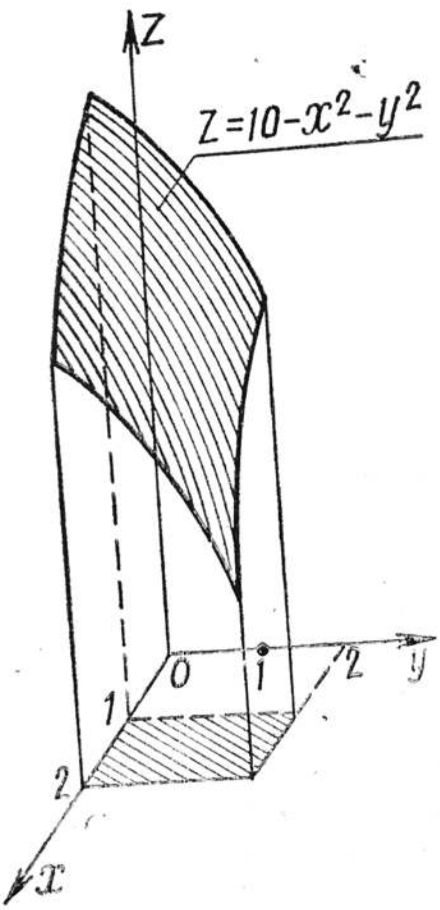


Рис. 12.

Тогда

$$\iint_D (10-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\frac{52}{3} - 2x^2\right) dx = \left[\frac{52}{3}x - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{38}{3}.$$

Изменим порядок интегрирования. Применим формулу (7).

$$\iint_D (10-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_1^2 (10-x^2-y^2)\,dx\right) dy.$$

Считая y постоянной, вычислим внутренний интеграл.

$$\int_1^2 (10-x^2-y^2)\,dx = \left[10x - \frac{x^3}{3} - xy^2\right]_1^2 = 20 - \frac{8}{3} - 2y^2 - 10 + \frac{1}{3} + y^2 = \frac{23}{3} - y^2.$$

Тогда

$$\iint_D (10-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\frac{23}{3} - y^2\right)dy = \left[\frac{23}{3}y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{46}{3} - \frac{8}{3} = \frac{38}{3}.$$

Как видно, полученные результаты совпадают.

134. Вычислить интеграл $\int_3^5 dx \int_1^e \frac{2x-1}{y}\,dy$.

Решение. При вычислении внутреннего интеграла x считается постоянной, поэтому множитель $(2x-1)$ можно вынести за знак внутреннего интеграла.

Имеем

$$\int_3^5 dx \int_1^e \frac{2x-1}{y}\,dy = \int_3^5 (2x-1)\,dx \int_1^e \frac{dy}{y} =$$

1 - 0

$$= \int\limits_3^5 (2x-1)\,dx \Big[\ln y\Big]_1^e = \int\limits_3^5 (2x-1)\,dx\,[\ln e - \ln 1] =$$

$$= \int\limits_3^5 (2x-1)\,dx = \Big[x^2 - x\Big]_3^5 = 25-5-9+3=14.$$

135. Вычислить интеграл:

а) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (x^2+2y)\,dx$; б) $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$;

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2}$; г) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{(x+y+2)^2}$.

136. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2+2)\,dx\,dy$, если область D есть прямоугольник, стороны которого определены уравнениями $x=2$; $x=4$; $y=0$ и $y=3$.

137. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (12-4x-3y)\,dx\,dy$, если прямоугольная область D ограничена осями координат и прямыми $x=1$ и $y=2$.

138. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy$, если область D ограничена осями координат и прямыми $x=\frac{\pi}{2}$; $y=\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим общий случай. Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, где область D ограничена замкнутым контуром. При этом любая прямая, параллельная оси Ox или оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках.

Опишем вокруг контура области прямоугольник, стороны которого параллельны осям Ox и Oy и касаются контура в точках A, B, C, G. Пусть уравнения сторон прямоугольника: $x=a$, $x=b$, $y=c$ и $y=d$. Точки касания A и B разбивают контур области на две линии: ACB и AGB (рис. 13). Пусть $y=\varphi_1(x)$ есть уравнение кривой ACB, а $y=\varphi_2(x)$ есть уравнение кривой AGB.

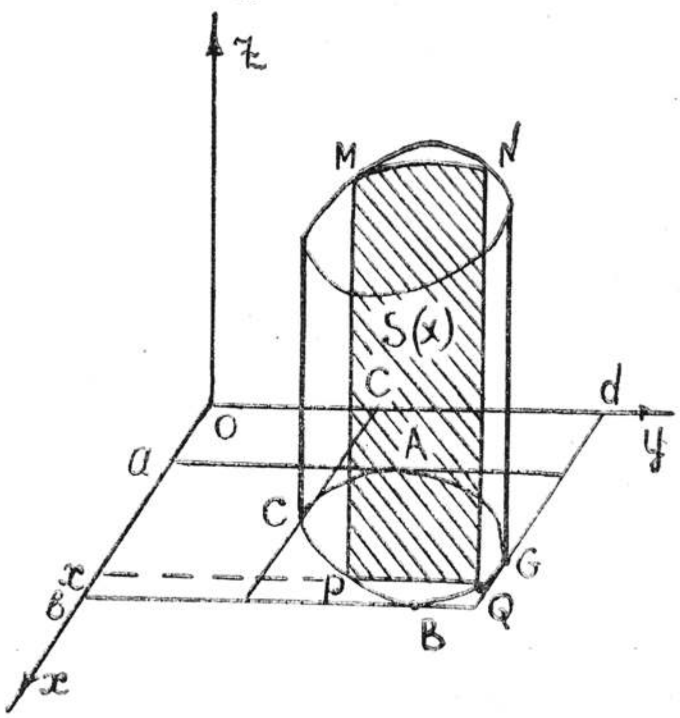
Площадь сечения в этом случае можно найти по формуле

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \qquad (9)$$

Тогда формула (4) примет вид

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{10}$$

При вычислении внутреннего интеграла (10) x считается постоянной. Пусть $x=g_1(y)$ есть уравнение кривой CAG, а $x=g_2(y)$ есть уравнение кривой CBG. Тогда площадь сечения $S(y)$, проведенного перпендикулярно к оси Oy (рис. 14), может быть найдена по формуле



$$S(y) = \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\,dy. \tag{11}$$

Рис. 13.

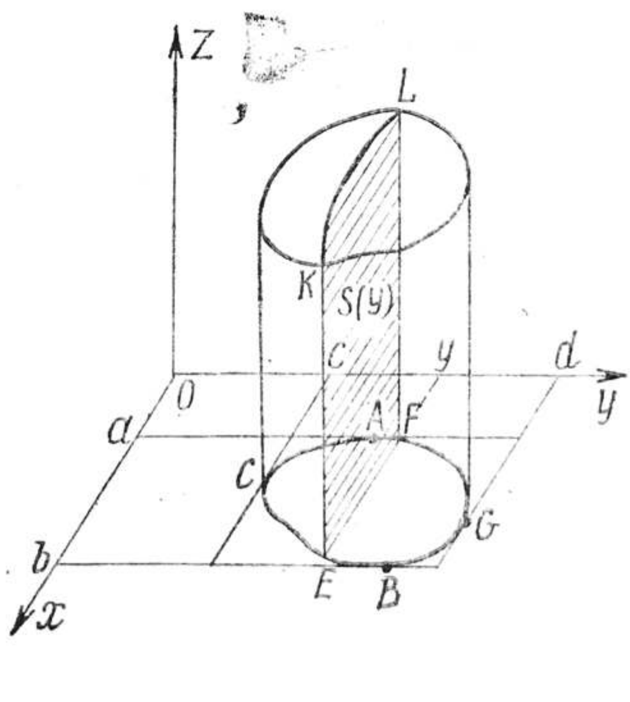


Рис. 14.

Тогда формула (7) примет вид

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (12)$$

При вычислении внутреннего интеграла (12) y считается постоянной. Таким образом, данный двойной интеграл можно вычислить по формуле (10) и по формуле (12).

139. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} x^2 y\,dy$.

Решение. Применим формулу (10). Так как при вычислении внутреннего интеграла x считается постоянной, то множитель x^2 можно вынести за знак внутреннего интеграла.

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} x^2 y\,dy = \int\limits_1^2 x^2 dx \int\limits_x^{2x} y\,dy = \int\limits_1^2 x^2 dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{2x} =$$

$$= \int\limits_1^2 x^2 dx \left(2x^2 - \frac{x^2}{2}\right) = \int\limits_1^2 \frac{3}{2} x^4 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{3}{10}(32-1) = 9{,}3.$$

140. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2-1}^{2x-1} (x+2y)\,dy$.

Решение. Применяем формулу (10).

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2-1}^{2x-1} (x+2y)\,dy = \int\limits_0^2 dx \left[xy + y^2\right]_{x^2-1}^{2x-1} =$$

$$= \int\limits_0^2 [x(2x-1) + (2x-1)^2 - x(x^2-1) - (x^2-1)^2]\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (2x^2 - x + 4x^2 - 4x + 1 - x^3 + x - x^4 + 2x^2 - 1)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (8x^2 - 4x - x^3 - x^4)\,dx = \left|\frac{8x^3}{3} - 2x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{44}{15}.$$

Теперь изменим порядок интегрирования и вычислим данный интеграл с помощью формулы (12). Для этой цели построим заданную область интегрирования. Пределы внешнего интеграла по переменной x — числа 0 и 2 — указывают на то, что область D ограничена слева осью Ox и справа прямой

$x=2$. Пределы внутреннего интеграла по переменной y указывают, что область D ограничена снизу параболой $y=x^2-1$, а сверху прямой $y=2x-1$. Построив эти линии на отрезке [0; 2], получим область D (рис. 15). Эти линии пересекаются в точках $A(-1;\ 0)$ и $B(2;3)$. Установим пределы интегрирования для внешнего интеграла по переменной y.

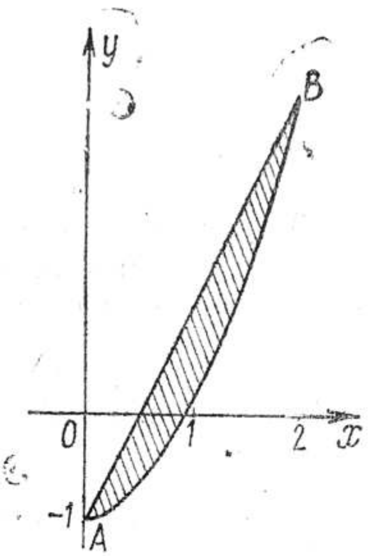


Рис. 15.

Как видно, наименьшее значение, которое принимает y в рассматриваемой области D, равно -1 (в точке A), а наибольшее значение переменной y в области D равно 3 (в точке B).

Следовательно, внешний интеграл по переменной y будет иметь нижним пределом число -1 и верхним пределом — число 3. Определим пределы для внутреннего интеграла по переменной x. Из уравнения $y=2x-1$ получаем $x=\frac{y+1}{2}$ — нижний предел. Из уравнения параболы $y=x^2-1$ получаем $x=\sqrt{y+1}$ — верхний предел.

$$I=\int_0^2 dx\int_{x^2-1}^{2x-1}(x+2y)\,dy=\int_{-1}^3 dy\int_{\frac{y+1}{2}}^{\sqrt{y+1}}(x+2y)\,dy=$$

$$=\int_{-1}^3 dy\left[\frac{x^2}{2}+2xy\right]_{\frac{y+1}{2}}^{\sqrt{y+1}}=\int_{-1}^3\left[\frac{y+1}{2}+2y\sqrt{y+1}-\frac{(y+1)^2}{8}-\right.$$

$$\left.-(y+1)y\right]dy=\int_{-1}^3\frac{1}{2}(y+1)\,dy+\int_{-1}^3 2y\sqrt{y+1}\,dy-$$

$$-\int_{-1}^3\frac{1}{8}(y+1)^2dy-\int_{-1}^3(y^2+y)\,dy=\frac{1}{4}\Big[(y+1)^2\Big]_{-1}^3+$$

$$+\int_{-1}^{3} 2y\sqrt{y+1}\,dy - \frac{1}{24}\left[(y+1)^3\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{3} =$$

$$= 4 + 2\int_{-1}^{3} y\sqrt{y+1}\,dy - \frac{8}{3} - 9 - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$= 2\int_{-1}^{3} y\sqrt{y+1}\,dy - 12.$$

Чтобы вычислить оставшийся интеграл, положим $\sqrt{y+1}=z$; тогда $y+1=z^2$; $y=z^2-1$; $dy=2z\,dz$. Определим пределы для переменной z. При $y=-1$ переменная $z=0$, а при $y=3$ переменная $z=2$. Следовательно,

$$2\int_{0}^{2}(z^2-1)\cdot z\cdot 2z\,dz = 4\int_{0}^{2}(z^4-z^2)\,dz =$$

$$= 4\left[\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}\right]_0^2 = 4\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}\right) = \frac{224}{15}.$$

$$\text{Тогда } I = \frac{224}{15} - 12 = \frac{44}{15}.$$

Как видно, мы получили тот же ответ, однако вычисление интеграла с помощью формулы (12) более громоздко (для данной задачи).

141. Вычислить кратные интегралы:

а) $\int_{1}^{2} x^2\,dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dy}{y^2}$; б) $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx$;

в) $\int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x}{y}\,dy$; г) $\int_{0}^{2} x\,dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{dy}{x^2+y^2}$.

142. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x\,dx\,dy$, где область D есть треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 1)$, $B(0;\ 1)$.

143. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x\,dx\,dy$, где область D есть меньший сегмент, ограниченный прямой $y=2-x$ и окружностью $x^2+(y-1)^2=1$.

144. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\,dx\,dy$, где область D есть треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(10;\ 1)$, $B(1;\ 1)$.

144а. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, где область D ограничена осью Ox и верхней полуокружностью $(x-2)^2+y^2=1$.

145. Изменить порядок интегрирования в следующих кратных интегралах, предварительно изобразив на чертеже области интегрирования:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,\ y)\,dx$; б) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,\ y)\,dy$;

в) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy$; г) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{y-1}^{\sqrt{y-1}} f(x,\ y)\,dx$.

146. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,\ y)\,dy$.

Решение. По заданным пределам строим область D соответствующего двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$.

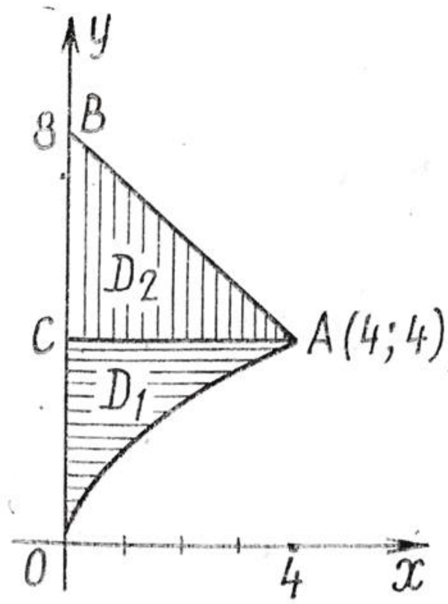


Рис. 16.

Как видно, область D ограничена слева осью Oy, а справа прямой $x=4$; снизу область ограничена параболой $y=2\sqrt{x}$, а сверху — прямой $y=8-x$ (рис. 16).

Чтобы изменить порядок интегрирования, разобьем область D на две области D_1 и D_2 прямой AC, проходящей через точку $A\ (4;\ 4)$ параллельно оси Ox. Тогда по свойству 3 имеем

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,\ y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Область D_1 (OAC) определяется неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{y^2}{4}. \end{cases}$$

Область D_2 (ABC) определяется неравенствами:

$$\begin{cases} 4 \leqslant y \leqslant 8, \\ 0 \leqslant x \leqslant 8-y. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{y^2}{4}} f(x, y)\,dx +$$

$$+ \int_4^8 dy \int_0^{8-y} f(x, y)\,dx.$$

147. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}+1}^{\frac{3}{2}y+4} f(x, y)\,dx.$$

Решение. Построим область D соответствующего двойного интеграла. Как видно, область D ограничена снизу осью Ox и сверху прямой $y=4$; слева область D ограничена прямой $x=\frac{y}{2}+1$ (AB) и справа прямой $x=\frac{3}{2}y+4$ (CK) (рис. 17).

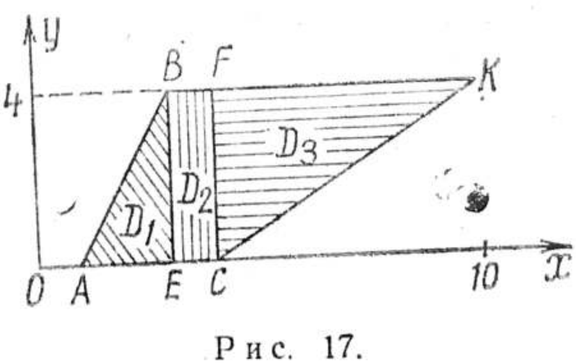


Рис. 17.

Для изменения порядка интегрирования разобьем область D на три области D_1 (прямоугольный треугольник ABE), D_2

(прямоугольник $BECF$) и D_3 (прямоугольный треугольник CFK). Так как $A(1;\ 0)$, $B(3;\ 4)$ и $E(3;\ 0)$, то область D_1 определяется неравенствами:

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2x-2 \text{ (уравнение } AB). \end{cases}$$

Так как $C(4;\ 0)$ и $F(4;\ 4)$, то область D_2 определяется неравенствами:

$$\begin{cases} 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 \leqslant y \leqslant 4. \end{cases}$$

Так как $K(10;\ 4)$, то область D_3 определяется неравенствами:

$$\begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 10, \\ \dfrac{2x-8}{3} \leqslant y \leqslant 4. \end{cases}$$

По свойству (3) получим

$$\int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}+1}^{\frac{3}{2}y+4} f(x,\ y)\,dx = \int_1^3 dx \int_0^{2x-2} f(x,\ y)\,dy +$$

$$+ \int_3^4 dx \int_0^4 f(x,\ y)\,dy + \int_4^{10} dx \int_{\frac{2x-8}{3}}^{4} f(x,\ y)\,dy.$$

148. Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

а) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{2y+1}^{4-y^2} f(x,\ y)\,dx;$ б) $\displaystyle\int_0^4 dy \int_{\frac{3\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,\ y)\,dx;$

в) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} f(x,\ y)\,dy;$ г) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_{2x-1}^{2x+2} f(x,\ y)\,dy;$

д) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,\ y)\,dy;$ е) $\displaystyle\int_1^2 dy \int_{\ln y}^{y} f(x,\ y)\,dx.$