Понятие о тройном интеграле. Задача о массе неоднородного тела.

§ 25. ЗАДАЧА О МАССЕ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА. ПОНЯТИЕ О ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть в прямоугольной системе координат дано некоторое неоднородное тело T, объем которого равен V. Пусть плотность распределения массы в этом теле выражается непрерывной положительной функцией $\delta = f(x, y, z)$ — функцией координат точек тела. Определим массу M данного тела T.

Разобьем тело T произвольным образом на n частей и обозначим объемы этих частей через $\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3, \ldots \Delta v_n$. В каждой части Δv_i выберем произвольным образом точку P_i и будем предполагать, что плотность во всех точках части Δv_i постоянна и равна плотности в точке P_i. Тогда масса M тела T будет приближенно равна сумме

$$M \approx f(P_1) \cdot \Delta v_1 + f(P_2) \cdot \Delta v_2 + \ldots f(P_n) \cdot \Delta v_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta v_i. \quad (1)$$

Назовем наибольшее расстояние между точками, принадлежащими части Δv_i через d_i. За величину массы M тела T принимают тот предел, к которому стремится сумма (1) при $n \to \infty$ и одновременном стремлении к нулю наибольшего диаметра $\max d_i$.

Сумма (1) называется n-й интегральной суммой, а ее предел — **тройным интегралом** от функции $f(x, y, z)$ по пространственной области V. Таким образом,

$$M = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta v_i = \iiint_V f(x, y, z)\, dv.$$

К понятию тройного интеграла, помимо определения массы тела, приводят и другие задачи. Основные свойства тройных интегралов такие же, как и свойства двойных интегралов.

В прямоугольной системе координат элемент объема $dv = dx\,dy\,dz$ и тройной интеграл принимает вид

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\,dy\,dz.$$

Если область интегрирования V определяется неравенствами:

$$a \leqslant x \leqslant b,$$
$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),$$
$$z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y),$$

то тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (2)$$

Область V ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$, а снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$ и проектируется на плоскость xOy в виде некоторой области, определяемой неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$.

Если область V является прямоугольным параллелепипедом, грани, которого параллельны координатным плоскостям и заданы уравнениями $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = m$ и $z = n$,

то $$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_m^n f(x, y, z)\, dz. \qquad (3)$$

197. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2y+2z)\,dx\,dy\,dz$, если V ограничена плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=-1$, $y=3$, $z=0$, $z=2$.

Решение. Для вычисления интеграла применяем формулу (3).

$$\iiint\limits_V (x^2y+2z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-1}^3 dy\int\limits_0^2 (x^2y+2z)\,dz.$$

Вычисляем внутренний интеграл, считая при этом x и y постоянными.

$$\int\limits_0^2 (x^2y+2z)\,dz=\left[x^2yz+z^2\right]_0^2=2x^2y+4.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-1}^3 dy\int\limits_0^2 (x^2y+2z)\,dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-1}^3 (2x^2y+4)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\left[x^2y^2+4y\right]_{-1}^3=\int\limits_0^1 (9x^2+12-x^2+4)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1 (8x^2+16)\,dx=\left[\frac{8x^3}{3}+16x\right]_0^1=\frac{56}{3}.$$

198. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V 2z\,dx\,dy\,dz$, где, область V ограничена координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$ (рис. 35).

Решение. Область V-треугольная пирамида — ограничена снизу плоскостью $z=0$, сверху — плоскостью $z=1-x-y$. Область V проектируется на плоскость xOy в виде прямоугольного треугольника AOB, который определяется неравенствами $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1-x$. Следовательно,

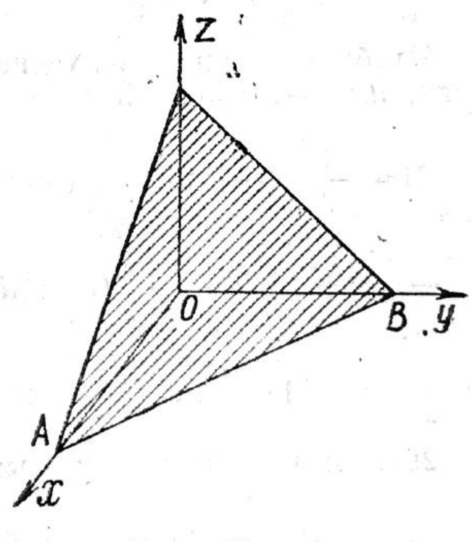

Рис. 35.

$$\iiint\limits_V 2z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}2z\,dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\left[z^2\right]_0^{1-x-y}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy=$$

$$=\int_0^1 dx\left[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_0^{1-x}=\int_0^1\frac{1}{3}(1-x)^3dx=$$

$$=\left[-\frac{(1-x)^4}{12}\right]_0^1=\frac{1}{12}.$$

199. Найти массу тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$, если плотность в каждой его точке равна произведению координат этой точки, то есть $\delta=f(x,\,y,\,z)=xyz$.

Решение. Искомая масса M равна интегралу

$$\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz.$$

По условию область V совпадает с той областью, которая была рассмотрена в задаче 198. Следовательно,

$$M=\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}y\,dy\int_0^{1-x-y}z\,dz=$$

$$=\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}y\,dy\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y}=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x}y(1-x-y)^2\,dy.$$

Чтобы вычислить полученный интеграл, положим $1-x=t$; тогда $dx=-dt$; при этом $t=1$ при $x=0$ и $t=0$ при $x=1$.

$$M=\frac{1}{2}\int_1^0(t-1)\,dt\int_0^t y(t-y)^2dy=\frac{1}{2}\int_1^0(t-1)\,dt\int_0^t(t^2y-$$

$$-2ty^2+y^3)\,dy=\frac{1}{2}\int_1^0(t-1)\,dt\left[\frac{t^2y^2}{2}-\frac{2ty^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right]_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^0(t-1)\cdot\frac{t^4}{12}\,dt=\frac{1}{24}\int_1^0(t^5-t^4)\,dt=\frac{1}{24}\left[\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}\right]_1^0=\frac{1}{720}.$$

200. Вычислить интегралы:

а) $\int_2^3 x\,dx\int_1^2 y^2dy\int_0^1 2z\,dz$; б) $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{y^2}x^2yz\,dz.$

201. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V (x+2y+3z+4)\,dx\,dy\,dz,$$

если область V определяется неравенствами:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$$

202. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V xy\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена цилиндром $x^2+y^2=1$, плоскостью $z=1$ и координатными плоскостями.

203. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена плоскостью $x+y+z=1$ и координатными плоскостями.

204. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (3x+4y)\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена параболоидом $z=x^2+y^2$, параболическим цилиндром $y=x^2$, плоскостями $y=1$ и $z=0$.

205. Вычислить массу пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $3x+2y+3z=6$, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе этой точки.

206. Вычислить массу полушара $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $z=0$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

§ 26. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ выражает массу неоднородного тела, объем которого равен V и плотность которого $\delta=f(x, y, z)$. Если плотность $\delta=1$, то тройной интеграл $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$ будет выражать собой объем области V.

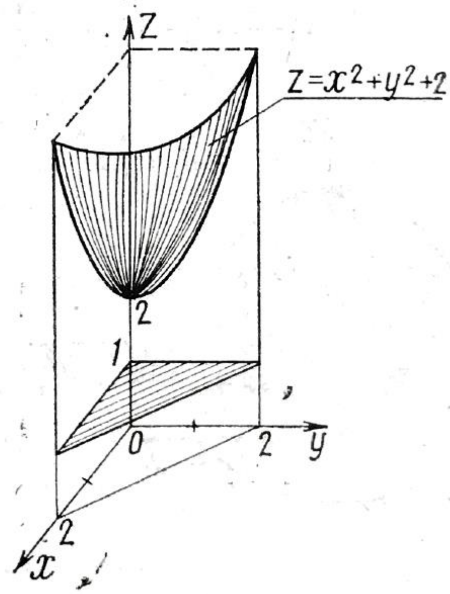

Рис. 36

Таким образом,

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz.$$

207. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z=x^2+y^2+2$ и плоскостями $z=1$, $x=0$, $y=0$, $x+y=2$ (рис. 36).

Решение. По условию область V задана неравенствами: $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2-x$, $1\leqslant z\leqslant x^2+y^2+2$.

Следовательно,

$$V=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\int\limits_1^{x^2+y^2+2} dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x} dy\left[z\right]_1^{x^2+y^2+2}=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}(x^2+y^2+1)\,dy=\int\limits_0^2 dx\left[x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right]_0^{2-x}=$$

$$=\int\limits_0^2\left[x^2(2-x)+\frac{(2-x)^3}{3}+2-x\right]dx=$$

$$=\int\limits_0^2(2x^2-x^3+2-x)\,dx+\frac{1}{3}\int\limits_0^2(2-x)^3dx=$$

$$=\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}(2-x)^4\right]_0^2=\frac{14}{3}.$$

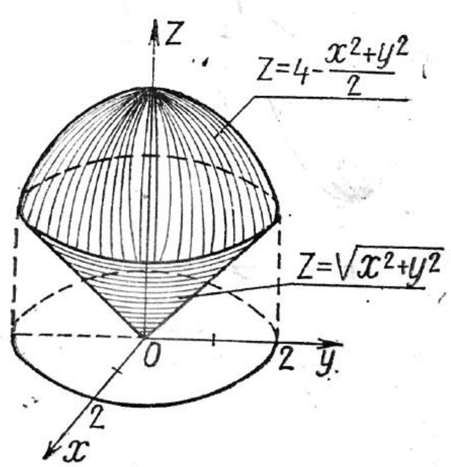

Рис. 37

208. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z=4-\frac{x^2+y^2}{2}$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 37).

Решение. Исключая из заданных уравнений z, получим уравнение области D, которая является проекцией данного тела на плоскость xOy. $4-\frac{x^2+y^2}{2}=\sqrt{x^2+y^2}$, откуда $x^2+y^2=4$. Таким образом, область D есть круг, радиус которого равен 2.

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\iint\limits_D dx\,dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4-\frac{x^2+y^2}{2}} dz=$$

$$=\iint\limits_D\left(4-\frac{x^2+y^2}{2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy.$$

Чтобы вычислить полученный двойной интеграл, перейдем к полярным координатам; так как область D определяется неравенствами $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ и $0\leqslant r\leqslant2$, то имеем

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(4-\frac{r^2}{2}-r\right)r\,dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(4r-\frac{r^3}{2}-r^2\right)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left[2r^2-\frac{r^4}{8}-\frac{r^3}{3}\right]_0^2=\frac{10}{3}\left[\varphi\right]_0^{2\pi}=\frac{20}{3}\pi.$$

209. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z=3x^2+3y^2$ координатными плоскостями и плоскостью $x+y=2$.

210. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z=x^2+y^2$ и $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+2$,

б) $z=x^2+y^2$ и $z=6-\frac{x^2+y^2}{2}$,

в) $z=x^2+y^2$ и $x^2+y^2+z^2=2$,

г) $z=6-x^2-y^2$; $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

д) $z=6-x^2-y^2$; $z=\frac{1}{4}y$; $x=0$; $x=1$; $y=2$.

§ 27. ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТЕЛА

Если тело занимает объем V и плотность δ в каждой точке выражается формулой $\delta=f(x, y, z)$, то масса M находится по формуле

$$M=\iiint\limits_V f(x, y, z)\;dx\,dy\,dz, \qquad (1)$$

а координаты центра тяжести тела вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V \delta\, x\, dx\, dy\, dz}{M}; y_c = \frac{\iiint\limits_V \delta\, y\, dx\, dy\, dz}{M};$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V \delta\, z\, dx\, dy\, dz}{M}. \quad (2)$$

Если тело является **однородным**, то, положив $\delta = 1$, получим

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\, dx\, dy\, dz}{V}; y_c = \frac{\iiint\limits_V y\, dx\, dy\, dz}{V}; z_c = \frac{\iiint\limits_V z\, dx\, dy\, dz}{V}. \quad (3)$$

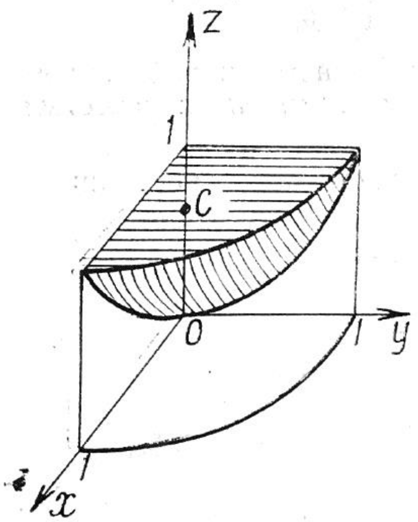

Рис. 38.

211. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом, $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 1$ (рис. 38).

Решение. В силу симметрии следует, что центр тяжести расположен на оси Oz. Следовательно, $x_c = 0$ и $y_c = 0$.

Так как тело однородное, то применяем формулы (3). Вычислим объем тела. Решая совместно уравнения $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$, получаем $x^2 + y^2 = 1$; это означает, что тело проектируется на плоскость xOy в виде круга, радиус которого равен 1.

Следовательно,

$$V = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz = \iint\limits_D dx\, dy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} dz = \iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy,$$

где область D есть круг $x^2 + y^2 = 1$. Чтобы вычислить последний интеграл, перейдем к полярным координатам. Область D определяется неравенствами: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Следовательно,

$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r-r^3)\,dr=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Теперь вычислим числитель для z_c.

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{1} z\,dz=\iint_D dx\,dy\left[\frac{z^2}{2}\right]_{x^2+y^2}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D dx\,dy\,[1-(x^2+y^2)^2]=\text{(переходя к полярным}$$

$$\text{координатам)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^4)\,r\,dr=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r-r^5)\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, $z_c=\frac{\pi}{3}:\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}$. Итак, центр тяжести данного тела находится в точке $C(0;\ 0;\ \frac{2}{3})$.

212. Вычислить координаты центра тяжести куба $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$, если плотность в каждой его точке равна произведению координат этой точки.

Решение. По условию плотность $\delta=x\cdot y\cdot z$. Вычислим массу M куба.

$$M=\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y\,dy\int_0^1 z\,dz=\frac{1}{8}.$$

Из соображений симметрии следует $x_c=y_c=z_c$. Поэтому достаточно найти только одну координату x_c. Вычислим числитель для x_c в формуле (3).

$$\iiint_V xyz\,x\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 x^2dx\int_0^1 y\,dy\int_0^1 z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx\int_0^1 y\,dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{12}.$$

Следовательно,

$$x_c = \frac{1}{12} : \frac{1}{8} = \frac{2}{3} \text{ и } C\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$$ — центр тяжести куба.

213. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного плоскостью $x+y+z=a$ и координатными плоскостями.

214. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного указанными поверхностями:

а) $x^2+y^2+z^2=R^2$; $z=0$; $z \geqslant 0$,

б) $z=\frac{2x^2+y^2}{4}$; $z=2$;

в) $x^2+y^2-z^2=0$; $z=2$.

215. Найти координаты центра тяжести куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если плотность в каждой его точке равна квадрату произведения координат этой точки.