§ 20. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

В прямоугольной системе координат двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D имел вид

$$\iint\limits_D f(x, y)\,ds = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Пусть область D задана в полярной системе координат. Если полюс O полярной системы координат совпадает с началом координат прямоугольной системы, а направление полярной оси совпадает с направлением оси абсцисс, то формулы перехода

$$x = r\cos\varphi, \qquad (2)$$

$$y = r\sin\varphi,$$

где r и φ — координаты точек области D.

В полярной системе координат элемент площади $ds = r\,dr\,d\varphi$ и

$$\iint\limits_D f(x, y)\,ds = \iint\limits_D f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\ r\,dr\,d\varphi \qquad (3)$$

или

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\ r\,dr\,d\varphi\ . \qquad (4)$$

Формула (4) позволяет преобразовать двойной интеграл в прямоугольных координатах в двойной интеграл в полярных координатах.

Рассмотрим способ вычисления такого интеграла.

Пусть контур D пересекается лучами, исходящими из полюса O не более двух раз (рис. 18). Предположим, что область D заключена между лучами OA и OB; пусть луч OA образует с полярной осью угол α, а луч OB образует угол β.

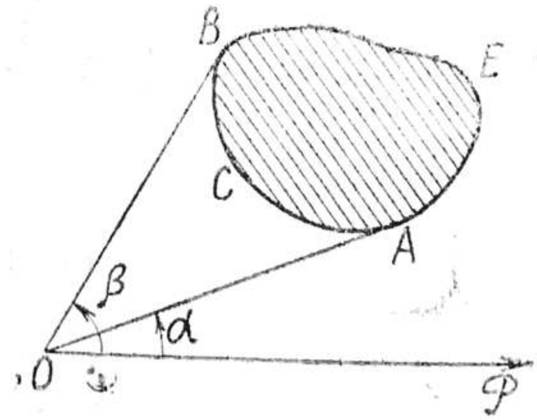

Рис. 18.

Если $r=r_1(\varphi)$ есть уравнение линии ACB в полярной системе координат, а $r=r_2(\varphi)$ есть уравнение линии AEB в полярной системе координат, то интеграл (4) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr. \tag{5}$$

Если, в частности, полюс O содержится внутри области интегрирования D и любой полярный радиус пересекает контур области в одной точке, то угол φ в этом случае изменяется от 0 до 2π.

× 808

149. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где область D есть круг с центром в начале координат и с радиусом, равным единице (рис. 19). Так как $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ и $dx\,dy=r\,dr\,d\varphi$, то

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}\;r\,dr\,d\varphi = \iint\limits_D \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\varphi.$$

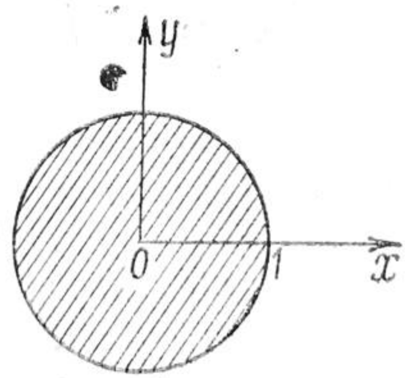

Рис. 19.

Для заданной области D угол φ меняется от 0 до 2π, а полярный радиус r при любом φ изменяется от 0 до 1. Следовательно,

$$\iint\limits_D \sqrt{1-r^2}\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\, dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^1 (1-r^2)^{\frac{1}{2}} (-2r\, dr) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\frac{2}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi.$$

150. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D y\, dx\, dy$, где область D есть полукруг с центром в точке (3; 0) и с радиусом, равным 3 (рис. 20).

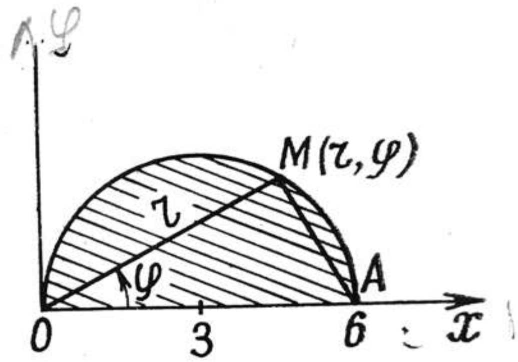

Рис. 20.

Решение. Перейдем к полярной системе координат. Пусть полюс совпадает с началом координат, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси Ox. Чтобы найти уравнение полуокружности AMO в полярной системе координат, выберем на ней произвольную точку $M(r, \varphi)$ и определим зависимость между полярными координатами r и φ. Как видно, при любом выборе точки M угол AMO будет прямым. Следовательно, $r = OA \cdot \cos\varphi$ или $r = 6\cos\varphi$ (так как $OA = 6$).

Таким образом, в заданной области D полярный радиус r меняется от 0 до $6\cos\varphi$, а полярный угол φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Переходя к полярной системе координат, будем иметь

$$\iint\limits_D y\, dx\, dy = \iint\limits_D r\sin\varphi\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{6\cos\varphi} r^2 dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{6\cos\varphi} = 72 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= -72\left[\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 18.$$

151. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область D ограничена прямыми $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ и другой окружности $x^2+y^2=4$, лежащей в первой четверти (рис. 21).

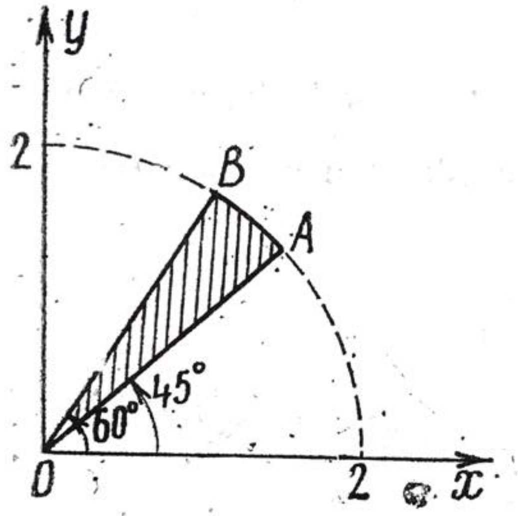

Рис. 21.

Решение. Уравнение заданной окружности в полярной системе координат $r=2$. Следовательно, в заданной области D r изменяется от 0 до 2. Так как радиус OA ($y=x$) образует с полярной осью угол в 45°, а радиус OB ($y=\sqrt{3}\,x$) образует с полярной осью угол в 60°, то угол φ для данной области изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$. Переходя к полярным координатам и применяя формулу (5), будем иметь

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^2 (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\,r\,dr =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 dr = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = 4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы.

152. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$; область D ограничена осью Ox и верхней полуокружностью $x^2+y^2=a^2$.

153. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$; область D ограничена окружностью $(x-a)^2+y^2=a^2$.