162. Переходя к полярным координатам, вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $(x-a)^2+y^2=a^2$; $x^2+(y-a)^2=a^2$;

б) $(x^2+y^2)^2=a({}^3+y^3)$; в) $(x^2+y^2)^3=a^2xy^3$;

г) $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$.

§ 22. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

163. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z=3x^2+y^2$, плоскостями $x=1$ и $y=2$ и координатными плоскостями (рис. 25).

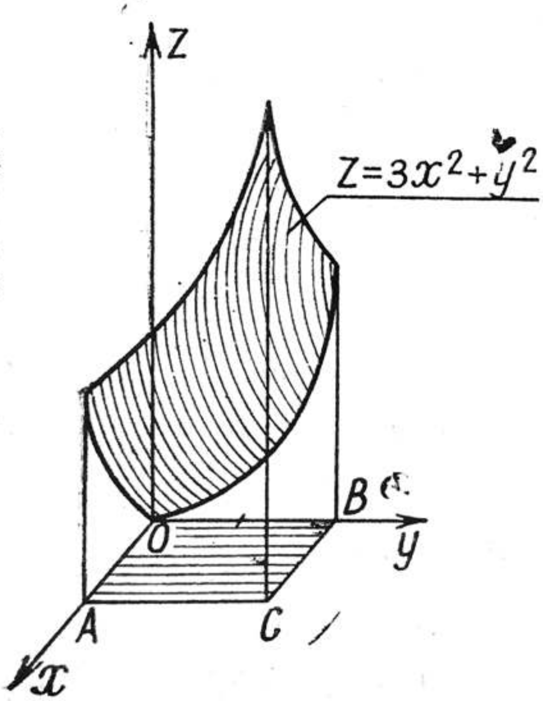

Рис. 25.

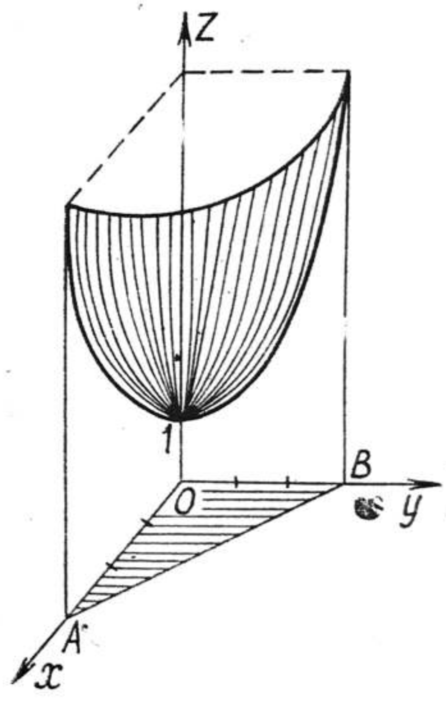

Рис. 26.

Решение. Объем V вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy. \quad =\iint\limits_D z\,dx\,dy$$

В данном случае область D — основание тела — есть прямоугольник $OACB$. По условию область D задана неравенствами $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2$. Следовательно,

$$V=\int_0^1 dx\int_0^2 (3x^2+y^2)\,dy=\int_0^1 dx\left[3x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^2=$$

$$=\int_0^1\left(6x^2+\frac{8}{3}\right)dx=\left[2x^3+\frac{8}{3}x\right]_0^1=\frac{14}{3}\text{ куб. ед.}$$

164. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z=x^2+y^2+1$, плоскостью $x+y-3=0$ и координатными плоскостями (рис. 26).

Решение. Основанием тела служит треугольник OAB. Область D в данном случае определяется неравенствами:

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 0\leqslant y\leqslant 3-x. \end{cases}$$

Следовательно,

$$V=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}(x^2+y^2+1)\,dy=\int_0^3 dx\left[x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right]_0^{3-x}=$$

$$=\int_0^3\left[x^2(3-x)+\frac{(3-x)^3}{3}+3-x\right]dx=$$

$$=\int_0^3\left(3x^2-x^3+9-9x+3x^2-\frac{x^3}{3}+3-x\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(6x^2-\frac{4x^3}{3}-10x+12\right)dx=$$

$$=\left[2x^3-\frac{x^4}{3}-5x^2+12x\right]_0^3=18.$$

165. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z=4-x^2-y^2$ и плоскостью $z=0$ (рис. 27).

Решение. Параболоид $z=4-x^2-y^2$ и плоскость $z=0$ пересекаются по окружности, уравнение которой в плоскости xOy имеет вид $x^2+y^2=4$ (для этого достаточно решить совместно данные уравнения).

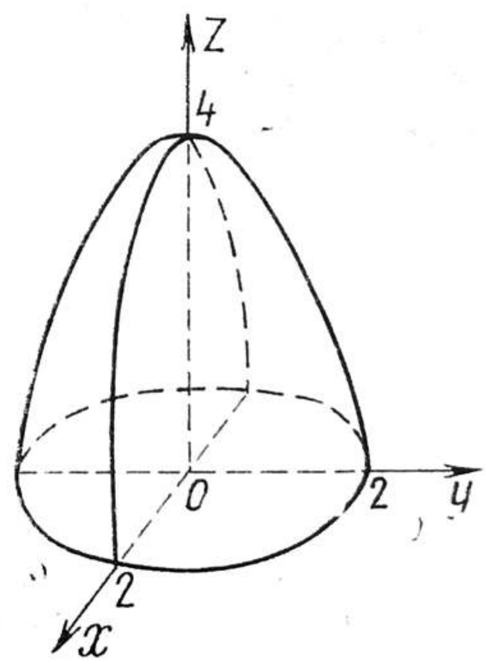

Рис. 27.

Следовательно,

$$V=\iint_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy,$$

где область D есть круг, радиус которого равен 2.

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам. Уравнение окружности в полярной системе координат будет $r=2$. Полагая $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$, будем иметь

$$V=\iint_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 (4-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi)\,r\,dr=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 (4r-r^3)\,dr=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2=\Big[4\varphi\Big]_0^{2\pi}=8\pi.$$

166. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=36$ и цилиндром $(x-3)^2+y^2=9$ (рис. 28).

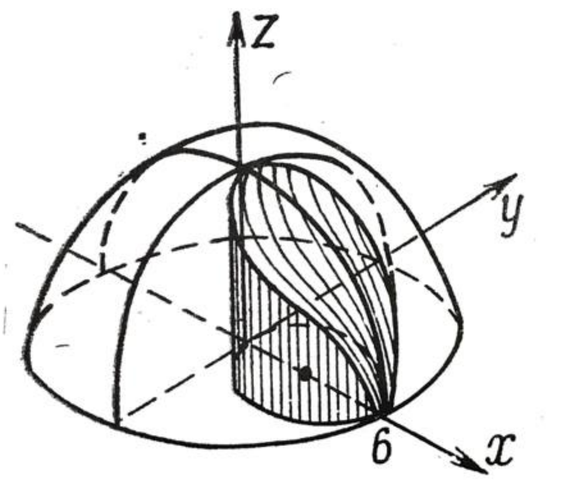

Рис. 28.

Решение. На рис. 28 изображена та часть объема, которая расположена над плоскостью xOy. В силу симметрии имеем

$$V=2\iint_D \sqrt{36-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Область D есть круг с центром в точке (3; 0) и с радиусом, равным 3. Область D ограничена окружностью, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $r=6\cos\varphi$ (см. задачу 150). Таким образом, область D определяется неравенствами:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 6\cos\varphi.$$

Перейдя к полярной системе координат, имеем

$$V=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{6\cos\varphi}\sqrt{36-r^2}\,r\,dr=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[-\frac{1}{3}\,(36-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{6\cos\varphi}=$$

$$=-\frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(36-36\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}-216\right]d\varphi=$$

$$=-288\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi-1\right]d\varphi=$$

$$=-288\left[-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}-\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-288\left(-\frac{\pi}{2}+1-\frac{1}{3}\right)=144\pi-192=48(3\pi-4)\approx 260 \text{ куб. ед.}$$

Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями.

167. Параболоидом вращения $z=4-x^2-y^2$ и плоскостями $x=-1$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$, $z=0$.

168. Эллиптическим параболоидом $z=\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{10}$, координатными плоскостями и плоскостями $x=6$, $y=5$.

169. Параболоидом вращения $z=x^2+y^2$, плоскостью $x+y=4$ и координатными плоскостями.

170. Эллиптическим параболоидом $z=2x^2+y^2+1$, плоскостью $x+y=1$ и координатными плоскостями.

171. Параболическим цилиндром $y=x^2$, параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ и плоскостями $y=1$, $z=0$.

Перейдя к полярным координатам, вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями.

172. Цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и плоскостями $z=0$, $z=x$.

173. Параболоидом $z=a-\frac{x^2+y^2}{a}$ и плоскостью $z=0$.

174. Цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и плоскостями $z=0$, $z=2a-x-y$.

175. Параболоидом $z=4-\frac{x^2+y^2}{4}$, цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостью $z=0$ (объем тела вне цилиндра).

176. Параболоидом $z=a-\frac{x^2+y^2}{a}$, цилиндром $x^2+y^2-ax=0$ и плоскостью $z=0$ (объем тела внутри цилиндра).