154. $\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; область D ограничена окружностью $x^2+y^2=1$ и окружностью $x^2+y^2=9$; $(y \geqslant 0)$.

155. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$; область D ограничена окружностью $x^2+y^2=1$.

156. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$; область D ограничена осями координат и прямыми $x+y=1$ и $x+y=2$.

§ 21. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР С ПОМОЩЬЮ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Как известно, объем V тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$, снизу плоскостью $z=0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области D, а образующие параллельны оси Oz, равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D, то есть

$$V=\iint\limits_D f(x, y)\,dx, dy. \tag{1}$$

Если в области D подинтегральная функция $f(x, y)=1$, то значение интеграла (1) численно равно площади области D. Следовательно, двойной интеграл можно применять для вычисления площадей плоских фигур. Если площадь области D обозначить через S, то

$$S=\iint\limits_D dx\,dy;\ S=\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi. \tag{2}$$

157. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y=2x+1$ и параболой $y=x^2+1$ (рис. 22).

Решение. Решая совместно систему

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=x^2+1, \end{cases}$$

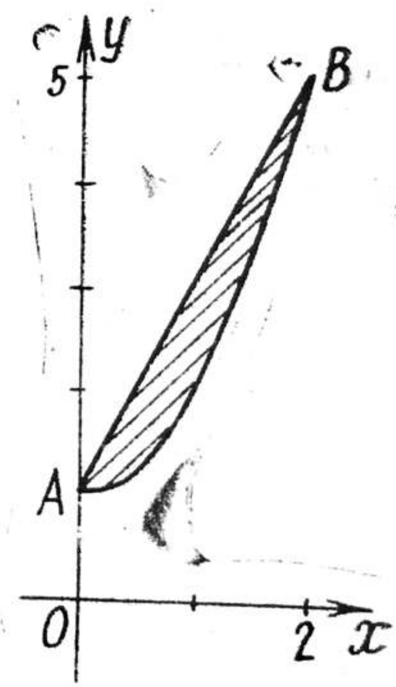

Рис. 22.

находим точки пересечения этих линий: $A(0,\ 1)$ и $B(2,\ 5)$. Применяя (2), будем иметь

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2+1}^{2x+1} dy=\int\limits_0^2 (2x+1-x^2-1)dx=$$

$$=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{3}\ .$$

158. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ \text{(рис. 23)}.$$

Решение. Переходим к полярной системе координат, полагая $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$; тогда получаем $r^2=a^2\ (\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$ или $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$. В силу симметрии кривой относительно координатных осей можно вычислить сначала ту часть, которая расположена в первой четверти. В этом случае угол φ будет изменяться от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а радиус r от 0 до $a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

$$\frac{1}{4}S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\Big[\sin 2\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4};\ \text{тогда}\ S=a^2.$$

159. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2=2ax^3$ (рис. 24) $(a>0)$.

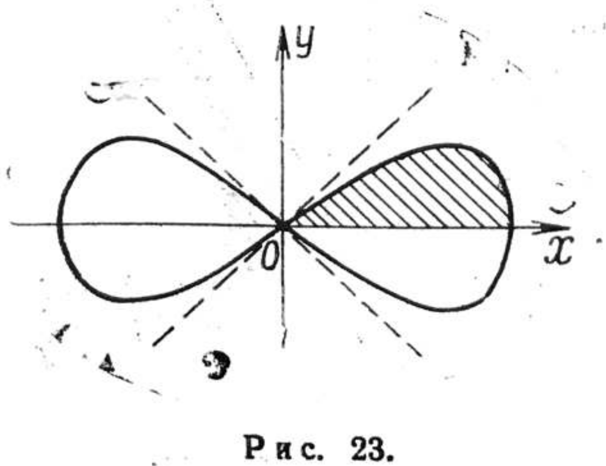

Рис. 23.

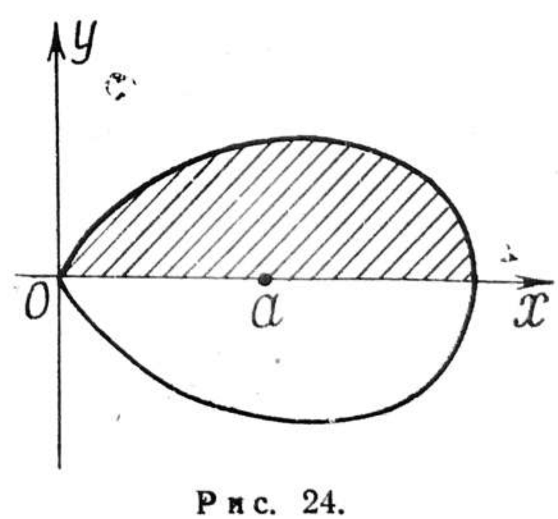

Рис. 24.

Решение. Введем полярные координаты. Полагая $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$, определим уравнение заданной линии в полярной системе координат: $r^4=2ar^3\cos^3\varphi$ или $r=2a\cos^3\varphi$. Кривая симметрична относительно оси абсцисс, поэтому можно найти площадь верхней половины области и результат удвоить. В этом случае угол φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а радиус r изменяется от 0 до $2a\cos^3\varphi$.

$$\frac{1}{2}S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos^3\varphi} r\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2a\cos^3\varphi}=$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\,d\varphi=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^3d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+3\cos2\varphi+$$

$$+3\cos^2 2\varphi+\cos^3 2\varphi)\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\left[\varphi+\frac{3}{2}\sin2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\varphi\,d\varphi+$$

$$+\frac{a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 2\varphi)\cos2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi a^2}{8}+\frac{3a^2}{8}\left[\varphi+\frac{\sin4\varphi}{4}\right]_0^{2}+$$

$$+\frac{a^2}{8}\left[\sin2\varphi-\frac{\sin^3 2\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{8}+\frac{3\pi a^2}{16}=\frac{5\pi a^2}{16};\quad S=\frac{5\pi a^2}{8}.$$

160. Вычислить площади плоских фигур, ограниченных указанными линиями:

а) $x=0;\ y=\sin x;\ y=\cos x;$

б) $x=y+1;\ x=e^y;\ y=-1;$

в) $x=0;\ y=\frac{x^2}{4a};\ y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}.$

161. Вычислить площадь меньшего сегмента, ограниченного окружностью $r=8$ и прямой $r=\frac{4}{\cos\varphi}$.