§ 23. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть поверхность, заданная уравнением $z=f(x, y)$, проектируется на плоскость xOy в область D. В этом случае площадь S этой поверхности вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \qquad (1)$$

177. Вычислить площадь части плоскости $x+y+z=4$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=4$ (рис. 29).

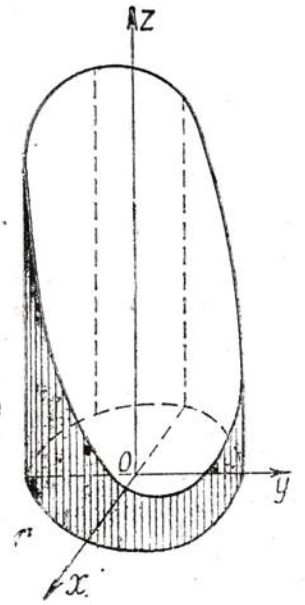

Рис. 29.

Решение. Применим формулу (1). Область интегрирования D есть круг радиуса $r=2$. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$z=4-x-y;\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-1;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1.$$

Тогда

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_D \sqrt{3}\,dx\,dy.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, введем полярные координаты. Область D определяется: $r=2$; $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Следовательно,

$$S=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 \sqrt{3}\,r\,dr=\sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2=$$

$$=2\sqrt{3}\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}=4\pi\sqrt{3}.$$

178. Вычислить площадь поверхности, вырезаемую цилиндром

$$x^2+y^2=9 \text{ из сферы } x^2+y^2+z^2=25.$$

Решение. Вычислим площадь поверхности, вырезаемой цилиндром из верхней полусферы (рис. 30). Для верхней полусферы

$$z=\sqrt{25-x^2-y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}.$$

$\frac{dz}{dx}=\frac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{25-x^2-y^2}}$

Подставляя в (1), имеем

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2-y^2}+\frac{y^2}{25-x^2-y^2}}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_D \sqrt{\frac{25-x^2-y^2+x^2+y^2}{25-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\iint\limits_D \frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

где область D есть круг с центром в начале координат и с радиусом $r=3$. Для вычисления полученного интеграла переходим к полярным координатам.

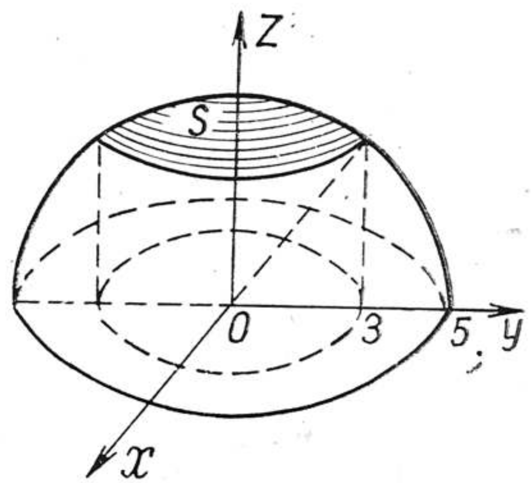

Рис. 30.

$$S=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \frac{5}{\sqrt{25-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}}\,r dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \frac{5 r dr}{\sqrt{25-r^2}}=-5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left[\sqrt{25-r^2}\right]_0^3=$$

$$=-5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,(4-5)=5[\varphi]_0^{2\pi}=10\pi.$$

Следовательно, площадь поверхности, вырезаемой цилиндром из сферы, равна 20π.

179. Вычислить площадь части поверхности параболоида $z=x^2+y^2+1$, находящейся внутри цилиндра $x^2+y^2=6$ (рис. 31).

Решение. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$. Тогда

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy,$$

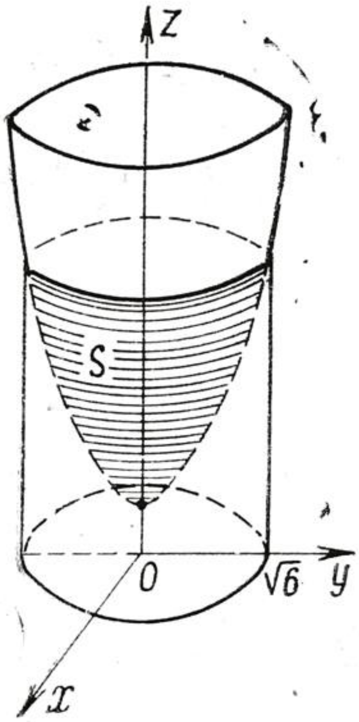

Рис. 31.

где область D есть круг, радиус которого $r = \sqrt{6}$.

Переходя к полярным координатам, будем иметь

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{6}} (1+4r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 8r\,dr =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi \left[(1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{31}{3}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{62}{3}\pi.$$

180. Вычислить площадь части плоскости $x+y+z=2a$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=a^2$.

181. Вычислить площадь поверхности верхней половины сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

182. Вычислить площадь части поверхности параболоида $x^2+y^2=2az$, находящейся внутри цилиндра $x^2+y^2=3a^2$.

183. Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2+y^2-z^2=0$, находящейся внутри цилиндра $(x-1)^2+y^2=1$.

184. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2+z^2=a^2$, находящейся внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$.

185. Вычислить площадь части поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=4a^2$, вырезаемой цилиндром $(x-a)^2+y^2=a^2$.

§ 24. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

Пусть дана материальная пластинка, которая расположена в плоскости xOy и занимает площадь области D. Если на