ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО РАЗДЕЛУ «ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

1. Дана функция $u(M)=u(x;y;z)$ и точки M_1 и M_2. Вычислить:

   а) производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

   б) $\overrightarrow{grad}\,u(M_1)$.

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P и координатными плоскостями, двумя способами:

   а) используя определение потока;

   б) с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $Ax+By+Cz=D$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}(A;B;C)$ этой плоскости двумя способами:

   а) используя определение циркуляции;

   б) с помощью формулы Стокса.

4. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M)=u(x;y;z)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

5. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

6.

Варианты 1–11. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальным.

Варианты 12–25. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M)$ потенциальным.

Вариант 1

1. $u(M)=x^2y+y^2z+z^2x;\quad M_1(1;-1;2);\quad M_2(3;4;-1).$

2. $\vec{a}(M)=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k};\quad P:\quad x+3y+z=3.$

3. $\vec{a}(M)=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k};\quad P:\quad 2x+y+2z=2.$

4. $u(M)=xyz;\quad M_0(0;1;-2).$

5. $\vec{a}(M)=x^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k};\quad M_0(0;1;-2).$

6. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}-2(y+z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}.$

Вариант 2

1. $u(M)=5xy^3z^2;\quad M_1(2;1;-1);\quad M_2(4;-3;0).$

2. $\vec{a}(M)=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k};\quad P:\quad 2x-y-2z=2.$

3. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k};\quad P:\quad 3x+2y+z=6.$

4. $u(M)=x^2yz;\quad M_0(2;0;2).$

5. $\vec{a}(M)=xy\vec{i}+(yz+xz)\vec{j}+xz\vec{k};\quad M_0(2;0;3).$

6. $\vec{a}(M)=x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}+2xyz\vec{k}.$

Вариант 3

1. $u(M)=\ln(x^2+y^2+z^2);\quad M_1(-1;2;1);\quad M_2(3;1;-1).$

2. $\vec{a}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k};\quad P:\quad 3x+3y+z=3.$

3. $\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+(y-2z)\vec{k};\quad P:\quad 2x+2y+z=2.$

4. $u(M)=xy^2z;\quad M_0(1;-2;0).$

5. $\vec{a}(M)=xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}-x^2\vec{k};\quad M_0(1;-2;0).$

6. $\vec{a}(M)=(yz-2x)\vec{i}+(xz+2y)\vec{j}+xy\vec{k}.$

Вариант 4

1. $u(M)=ze^{x^2+y^2+z^2};\quad M_1(0;0;0);\quad M_2(3;-4;2).$

2. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k};\quad P:\quad x+y+z=2.$

3. $\vec{a}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k};\quad P:\quad x+3y+2z=6.$

4. $u(M)=xyz^2;\quad M_0(3;0;1).$

5. $\vec{a}(M)=xz\vec{i}+z\vec{j}+yz\vec{k};\quad M_0(3;0;1).$

6. $\vec{a}(M)=(x^2-z^2)\vec{i}-3xy\vec{j}+(y^2+z^2)\vec{k}.$

Вариант 5

1. $u(M)=\ln(xy+yz+xz);\quad M_1(-2;3;-1);\quad M_2(2;1;-3).$

2. $\vec{a}(M)=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k};\quad P:\quad 2x+y+2z=2.$

3. $\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k};\quad P:\quad x+2y+2z=2.$

4. $u(M)=x^2y^2z;\quad M_0(-1;0;3).$

5. $\vec{a}(M)=xy\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k};\quad M_0(-1;0;3).$

6. $\vec{a}(M)=2xyz\vec{i}-y(yz+1)\vec{j}+z\vec{k}.$

Вариант 6

1. $u(M)=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2};\quad M_1(1;1;1);\quad M_2(3;2;1).$

2. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k};\quad P:\quad x+2y+z=2.$

3. $\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k};\quad P:\quad 2x+y+3z=6.$

4. $u(M)=x^2yz^2;\quad M_0(2;1;-1).$

5. $\vec{a}(M)=yz\vec{i}-z^2\vec{j}+xyz\vec{k};\quad M_0(2;1;-1).$

6. $\vec{a}(M)=(2x-3y)\vec{i}+2xy\vec{j}-z^2\vec{k}.$

Вариант 7

1. $u(M)=x^2y+xz^2-2;\quad M_1(1;1;-1);\quad M_2(2;-1;3).$

2. $\vec{a}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k};\quad P:\quad 2x-3y+z=6.$

3. $\vec{a}(M)=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k};\quad P:\quad x+2y+z=2.$

4. $u(M)=xy^2z^2;\quad M_0(-2;1;1).$

5. $\vec{a}(M)=y^2\vec{i}-xy\vec{j}+z^2\vec{k};\quad M_0(-2;1;1).$

6. $\vec{a}(M)=(x^2-y^2)\vec{i}+(y^2-z^2)\vec{j}+(z^2-x^2)\vec{k}.$

Вариант 8

1. $u(M)=xe^y+ye^x-z^2;\quad M_1(3;0;2);\quad M_2(4;1;3).$

2. $\vec{a}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k};\quad P:\quad x-y+z=2.$

3. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k};\quad P:\quad 2x+2y+z=4.$

4. $u(M)=y^2z-x^2;\quad M_0(0;1;1).$

5. $\vec{a}(M)=xz\vec{i}-xyz\vec{j}+x^2z\vec{k};\quad M_0(0;1;1).$

6. $\vec{a}(M)=yz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+z^2\vec{k}.$

Вариант 9

1. $u(M)=3xy^2+z^2-xyz;\quad M_1(1;1;2);\quad M_2(3;-1;4).$

2. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k};\quad P:\quad 2x-y-2z=-2.$

3. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k};\quad P:\quad x+y+2z=2.$

4. $u(M)=x^2y+y^2z;\quad M_0(0;-2;1).$

5. $\vec{a}(M)=xy\vec{i}-y^2z\vec{j}-xz\vec{k};\quad M_0(0;-2;1).$

6. $\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}.$

Вариант 10

1. $u(M)=5x^2yz-xy^2z+yz^2;\quad M_1(1;1;1);\quad M_2(9;-3;9).$

2. $\vec{a}(M)=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k};\quad P:\quad x+2y+z=2.$

3. $\vec{a}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k};\quad P:\quad x+2y+2z=4.$

4. $u(M)=x(y+z);\quad M_0(0;1;2).$

5. $\vec{a}(M)=xz\vec{i}-y\vec{j}-zy\vec{k};\quad M_0(0;1;2).$

6. $\vec{a}(M)=3x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}-2xyz\vec{k}.$

Вариант 11

1. $u(M)=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2};\quad M_1(1;2;2);\quad M_2(-3;2;-1).$

2. $\vec{a}(M)=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k};\quad P:\quad 2x+y+z=2.$

3. $\vec{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k};\quad P:\quad x+y+2z=2.$

4. $u(M)=xy-xz;\quad M_0(-1;2;1).$

5. $\vec{a}(M)=y^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k};\quad M_0(-1;2;1).$

6. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}-2(y+z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}.$

Вариант 12

1. $u(M)=y^2z-2xyz+z^2;\quad M_1(3;1;-1);\quad M_2(-2;1;4).$

2. $\vec{a}(M)=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k};\quad P:\quad x+2y+2z=2.$

3. $\vec{a}(M)=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k};\quad P:\quad x-y+z=2.$

4. $u(M)=x^2yz;\quad M_0(1;-1;1).$

5. $\vec{a}(M)=xy\vec{i}-2xy^2\vec{j}+z^2\vec{k};\quad M_0(1;-1;1).$

6. $\vec{a}(M)=(yz-2x)\vec{i}+(xz+zy)\vec{j}+xy\vec{k}.$

Вариант 13

1. $u(M)=x^2+y^2+z^2-2xyz;\quad M_1(1;-1;2);\quad M_2(5;-1;4).$

2. $\vec{a}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k};\quad P:\quad 3x+2y+2z=6.$

3. $\vec{a}(M)=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k};\quad P:\quad 2x+3y+z=6.$

4. $u(M)=xyz;\quad M_0(2;1;0).$

5. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k};\quad M_0(2;1;0).$

6. $\vec{a}(M)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}.$

Вариант 14

1. $u(M)=\ln(1+x+y^2+z^2);\quad M_1(1;1;1);\quad M_2(3;-5;1).$

2. $\vec{a}(M)=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k};\quad P:\quad 2x+y+z=4.$

3. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(x+z)\vec{k};\quad P:\quad 3x-2y+2z=6.$

4. $u(M)=xyz^2;\quad M_0(4;0;1).$

5. $\vec{a}(M)=xy\vec{i}-(y+z)\vec{j}+xz\vec{k};\quad M_0(4;0;1).$

6. $\vec{a}(M)=6xy\vec{i}+(3x^2-2y)\vec{j}+z\vec{k}.$

Вариант 15

1. $u(M)=x^2+2y^2-4z^2-5;\quad M_1(1;2;1);\quad M_2(-3;-2;6).$

2. $\vec{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k};\quad P:\quad x+4y+2z=8.$

3. $\vec{a}(M)=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k};\quad P:\quad x-2y+2z=2.$

4. $u(M)=2x^2yz;\quad M_0(-3;0;2).$

5. $\vec{a}(M)=x\vec{i}-zy\vec{j}+x^2z\vec{k};\quad M_0(-3;0;2).$

6. $\vec{a}(M)=(2x-yz)\vec{i}+(2x-xy)\vec{j}+yz\vec{k}.$

Вариант 16

1. $u(M)=\ln(x^3+y^3+z+1);\quad M_1(1;3;0);\quad M_2(-4;1;3).$

2. $\vec{a}(M)=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k};\quad P:\quad x-2y+2z=2.$

3. $\vec{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k};\quad P:\quad x+4y+2z=8.$

4. $u(M)=x^2yz;\quad M_0(1;0;4).$

5. $\vec{a}(M)=(x+y^2)\vec{i}+yz\vec{j}-x^2\vec{k};\quad M_0(1;0;4).$

6. $\vec{a}(M)=(y-z)\vec{i}+3xyz\vec{j}+(z-x)\vec{k}.$

Вариант 17

1. $u(M)=x-2y+e^{z}$; $M_1(-4;-5;0)$; $M_2(2;3;4)$.

2. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(z+x)\vec{k}$; $P:\ 3x-2y+2z=6$.

3. $\vec{a}(M)=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$; $P:\ 2x+y+z=4$.

4. $u(M)=(x+y)z^2$; $M_0(0;-1;4)$.

5. $\vec{a}(M)=xz\vec{i}-y\vec{j}+yz\vec{k}$; $M_0(0;-1;4)$.

6. $\vec{a}(M)=(y-z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x^2-y^2)\vec{k}$.

Вариант 18

1. $u(M)=x^{y}-3xyz$; $M_1(2;2;-4)$; $M_2(1;0;-3)$.

2. $\vec{a}(M)=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$; $P:\ 2x+3y+z=6$.

3. $\vec{a}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$; $P:\ 3x+2y+2z=6$.

4. $u(M)=(x+z)y^2$; $M_0(2;2;2)$.

5. $\vec{a}(M)=xy\vec{i}-x\vec{j}+yz\vec{k}$; $M_0(2;2;2)$.

6. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}-2xz\vec{j}-3(y+z)\vec{k}$.

Вариант 19

1. $u(M)=3x^2yz^3$; $M_1(-2;-3;1)$; $M_2(5;-2;0)$.

2. $\vec{a}(M)=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$; $P:\ x-y+z=2$.

3. $\vec{a}(M)=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$; $P:\ x+2y+2z=2$.

4. $u(M)=x^2(y^2+z)$; $M_0(4;1;-3)$.

5. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k}$; $M_0(4;1;-3)$.

6. $\vec{a}(M)=z^2\vec{i}+(xz+y)\vec{j}+x^2y\vec{k}$.

Вариант 20

1. $u(M)=e^{xy+z^2}$; $M_1(-5;0;2)$; $M_2(2;4;-3)$.

2. $\vec{a}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$; $P:\ x+2y+2z=4$.

3. $\vec{a}(M)=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$; $P:\ 2x+y+z=2$.

4. $u(M)=(x^2+z)y^2$; $M_0(-4;1;0)$.

5. $\vec{a}(M)=(x-y)\vec{i}+yz\vec{j}-y\vec{k}$; $M_0(-4;1;0)$.

6. $\vec{a}(M)=xy(3x-4y)\vec{i}+x^2(x-4y)\vec{j}+3z^2\vec{k}$.

Вариант 21

1. $u(M)=x^{yz}$; $M_1(3;1;4)$; $M_2(1;-1;-1)$.

2. $\vec{a}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$; $P:\ x+y+2z=2$.

3. $\vec{a}(M)=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$; $P:\ x+2y+z=2$.

4. $u(M)=x^2(y+z^2)$; $M_0(3;0;1)$.

5. $\vec{a}(M)=(y-z)\vec{i}-z^2\vec{j}+xyz\vec{k}$; $M_0(3;0;1)$.

6. $\vec{a}(M)=6x^2\vec{i}+3\cos(3x+2z)\vec{j}+\cos(3y+2z)\vec{k}$.

Вариант 22

1. $u(M)=(x^2+y^2+z^2)^3$; $M_1(1;2;-1)$; $M_2(0;-1;3)$.

2. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k}$; $P:\ x+y+2z=2$.

3. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$; $P:\ 2x-y-2z=-2$.

4. $u(M)=(x^2-y)z^2$; $M_0(1;3;0)$.

5. $\vec{a}(M)=yz\vec{i}-z^2\vec{j}+(x+y)z\vec{k}$; $M_0(1;3;0)$.

6. $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(z-y)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$.

Вариант 23

1. $u(M)=(x-y)^z$; $M_1(1;5;0)$; $M_2(3;7;-2)$.

2. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$; $P:\ 2x+2y+z=4$.

3. $\vec{a}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$; $P:\ x-y+z=2$.

4. $u(M)=x(y^2+z^2)$; $M_0(1;-2;1)$.

5. $\vec{a}(M)=z^2\vec{i}-xz\vec{j}+z^2\vec{k}$; $M_0(1;-2;1)$.

6. $\vec{a}(M)=3(x-z)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}+3z\vec{k}$.

Вариант 24

1. $u(M)=x^2y+y^2z-3z$; $M_1(0;-2;-1)$; $M_2(12;-5;0)$.

2. $\vec{a}(M)=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$; $P:\ x+2y+z=2$.

3. $\vec{a}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$; $P:\ 2x-3y+z=6$.

4. $u(M)=x^2+3y^2-z^2$; $M_0(0;0;1)$.

5. $\vec{a}(M)=xy\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}$; $M_0(0;0;1)$.

6. $\vec{a}(M)=(2x-yz)\vec{i}+(xz-2y)\vec{j}+2xyz\vec{k}$.

Вариант 25

1. $u(M)=\dfrac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$; $M_1(-1;2;-2)$; $M_2(2;0;1)$.

2. $\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$; $P:\ 2x+y+3z=6$.

3. $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$; $P:\ x+2y+z=2$.

4. $u(M)=x^2z-y^2$; $M_0(1;1;-2)$.

5. $\vec{a}(M)=xz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+x^2z\vec{k}$; $M_0(1;1;-2)$.

6. $\vec{a}(M)=3x^2\vec{i}+4(x-y)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$.

Решение типового варианта по разделу «Теория поля»

Решение типового варианта

1. Дана функция $u(M)=\sqrt{x}/z-\sqrt{y}/x+2xyz$ и точки $M_1(1, 1, -1)$, $M_2(-2, -1, 1)$. Вычислить: 1) производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) **grad** $u(M_1)$.

▶ 1. Вычислим производную функции $u(M)=u(x, y, z)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3, -2, 2)$:

$$\frac{du(M_1)}{\partial\overrightarrow{M_1M_2}}=\left.\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right|_{M_1}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right|_{M_1}\cdot\cos\beta+$$

$$+\left.\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right|_{M_1}\cdot\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=\frac{1}{2z\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{x^2}+2yz,\quad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right|_{M_1}=-\frac{3}{2},$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y}=-\frac{1}{2x\sqrt{y}}+2xz,\quad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right|_{M_1}=-\frac{5}{2},$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z}=-\frac{\sqrt{x}}{z^2}+2xy,\quad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right|_{M_1}=1,$$

$$\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{17}},\quad \cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{17}},\quad \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{17}},$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial\overrightarrow{M_1M_2}}=-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}\right)-\frac{5}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right)+1\cdot\frac{2}{\sqrt{17}}=\frac{23}{2\sqrt{17}}.$$

2. Согласно определению,

$$\mathbf{grad}\,u(M_1)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\mathbf{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\mathbf{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\mathbf{k}=$$

$$=-\frac{3}{2}\mathbf{i}-\frac{5}{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}.\ ◀$$

4. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a}(M) = (x+z)\mathbf{i} + (2y-x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (p): $x - 2y + 2z = 4$ и координатными плоскостями, двумя способами: 1) использовав определение потока; 2) с помощью формулы Остроградского — Гаусса.

▶ 1. Вычисляем поток векторного поля с помощью поверхностного интеграла

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0 dS,$$

где S — внешняя сторона поверхности пирамиды $ABCO$ (рис. 15.15).

Вначале вычислим поток через каждую из четырех граней пирамиды. Грань AOC лежит в плоскости $y = 0$,

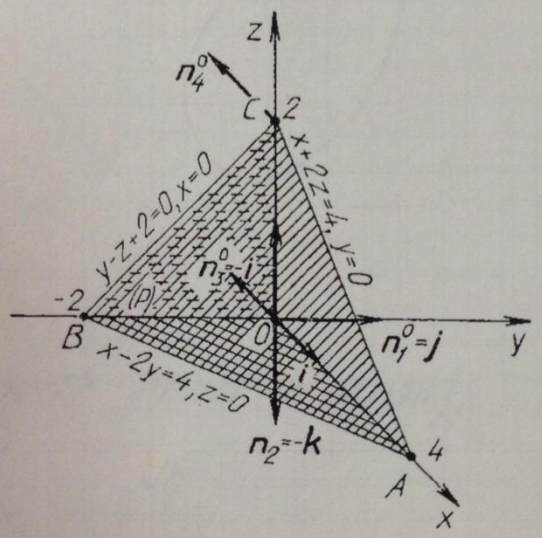

Рис. 15.15

нормаль к этой грани $\mathbf{n}^0 = \mathbf{j}$, $dS = dxdz$. Тогда поток векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через грань AOC

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{\triangle AOC} x dS = -\iint\limits_{\triangle AOC} x dx dz = -\int_0^4 x dx \int_0^{2-x/2} dz =$$

$$= -\int_0^4 x\left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = -\left(x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^4 = -\frac{16}{3}.$$

Грань AOB лежит в плоскости $z=0$, нормаль к этой грани $\mathbf{n}_2^0=-\mathbf{k}$, $dS=dxdy$,

$$\Pi_2=\iint\limits_{\triangle AOB} 0\cdot dxdy=0.$$

Грань BOC лежит в плоскости $x=0$, нормаль к данной грани $\mathbf{n}_3^0=-\mathbf{i}$, $dS=dydz$,

$$\Pi_3=-\iint\limits_{\triangle BOC} zdydz=-\int\limits_0^2 zdz\int\limits_{z-2}^0 dy=$$

$$=-\int\limits_0^2 z(-z+2)\,dz=-\left(-\frac{z^3}{3}+z^2\right)\Big|_0^2=-\frac{4}{3}.$$

И, наконец, грань ABC лежит в плоскости $x-2y+2z-$ $-4=0$, нормаль к этой грани

$$\mathbf{n}_4^0=\frac{\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3},$$

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy,\ z=-\frac{1}{2}x+y+2,$$

$$z_x'=-\frac{1}{2},\ z_y'=1.$$

Поэтому

$$dS=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}\,dxdy=\frac{3}{2}\,dxdy,$$

$$\Pi_4=\frac{1}{3}\,\frac{3}{2}\iint\limits_{\triangle ABC}((x+z)-2(2y-x)+2z)\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle ABC}(x+z-4y+2x+2z)\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle ABC}(3x-4y+3z)\,dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle AOB}\Big(3x-4y-$$

$$-\frac{3}{2}x+3y+6\Big)\,dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle AOB}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^0 dy\int\limits_0^{2y+4}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dx=$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} dy\left(\frac{3}{4}x^2 + (6-y)x\right)\Big|_0^{2y+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \left(\frac{3}{4}(2y+4)^2 + (6-y)(2y+4)\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 3(y^2+4y+4) + 12y + 24 - 2y^2 - 4y\Big) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} (y^2+20y+36)\, dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} + 10y^2 + 36y\right)\Big|_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{52}{3}.$$

Далее находим поток через полную поверхность пирамиды $ABCO$:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{32}{3}.$$

2. Вычислить поток через поверхность пирамиды $ABCO$ по формуле Остроградского — Гаусса:

$$\Pi = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Находим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(2y-x)}{\partial y} = 2,\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

Так как интеграл $\iiint\limits_V dxdydz$ равен объему прямоугольной пирамиды $ABCO$, то

$$\Pi = \iiint\limits_V (1+2+1)\, dxdydz = 4\iiint\limits_V dxdydz = \frac{32}{3}. \blacktriangleleft$$

$V = \frac{1}{3}Sh$, S - пл. основ-я $\qquad V = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\right)\cdot 2 = \frac{8}{3}$

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $a(M) = (x-2z)\vec{i} + (x+3y+z)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(p)\colon x+y+z=1$ с координатными плоскостями,

при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n} = (1,1,1)$ этой плоскости двумя

способами: 1) использовав определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса (15.27).

▶ В результате пересечения плоскости (p) с координатными плоскостями получим треугольник ABC

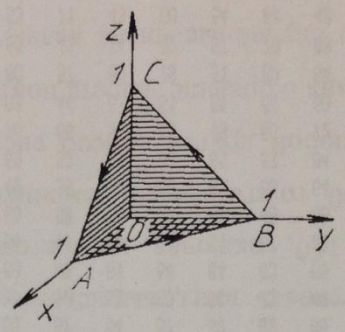

Рис. 15.16

(рис. 15.16) и укажем на нем положительное направление обхода контура $ABCA$ в соответствии с условием задачи.

1. Вычислим циркуляцию C данного поля по формуле (15.25), в которой обозначим $\mathbf{dl} = \vec{\tau}^0 dl$:

$$C = \oint\limits_{ABCA} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = \int\limits_{AB} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} + \int\limits_{BC} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} + \int\limits_{CA} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl}.$$

На отрезке AB имеем: $z = 0$, $x + y = 1$, $y = 1 - x$, $dy = -dx$,

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j} + (5x + y)\mathbf{k}, \quad \mathbf{dl} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j},$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = xdx + (x + 3y)\,dy,$$

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = \int\limits_{AB} xdx + (x + 3y)dy = \int\limits_1^0 (x - x - 3(1 - x))dx =$$

$$= \int\limits_1^0 (3x - 3)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 3x\right)\Big|_1^0 = \frac{3}{2}.$$

На отрезке BC верны соотношения: $x = 0$, $y + z = 1$, $z = 1 - y$, $dz = -dy$,

$$\mathbf{a} = -2z\mathbf{i} + (3y + z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}, \quad \mathbf{dl} = dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = (3y + z)dy + ydz,$$
$$\int\limits_{BC} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dl} = \int\limits_{BC} (3y + z)dy + ydz =$$

$$= \int\limits_1^0 (3y + 1 - y - y)dy = \int\limits_1^0 (y + 1)dy = \frac{(y+1)^2}{2}\Big|_1^0 = -\frac{3}{2}.$$

На отрезке CA имеем: $y=0$, $x+z=1$, $dz=-dx$,

$$\mathbf{a}\cdot d\mathbf{l}=(x-2z)dx+5xdz,$$

$$\int\limits_{CA}\mathbf{a}\cdot d\mathbf{l}=\int\limits_{CA}(x-2z)dx+5xdz=$$

$$=\int\limits_0^1(x-2+2x-5x)dx=\int\limits_0^1(-2x-z)dx=$$

$$=(x^2-2x)\Big|_0^1=-3.$$

Следовательно,

$$C=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-3=-3.$$

2. Вычислим циркуляцию данного поля с помощью формулы Стокса (15.27). Для этого определим

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{a}(M)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-2z & x+3y+z & 5x+y\end{vmatrix}=-7\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

В качестве поверхности S в формуле Стокса возьмем боковую поверхность пирамиды $OABC$:

$$S=S_{OCA}+S_{OAB}+S_{OBC}.$$

По формуле Стокса имеем

$$C=\iint\limits_S \mathbf{rot}\,a\cdot\mathbf{n}^\circ dS=\iint\limits_S \mathbf{rot}\,\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S},$$

где

$$d\mathbf{S}=dydz\mathbf{i}+dxdz\mathbf{j}+dxdy\mathbf{k},\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S})=$$
$$=-7dxdz+dxdy.$$

Следовательно,

$$C=\iint\limits_S -7dxdz+dxdy=-7\iint\limits_{S_{OAC}}dxdz+\iint\limits_{S_{OAB}}dxdy=-3.\ ◀$$

2. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M)=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ в точке $M_0(1,\ 1,\ 1)$.

▶ Находим частные производные функции $u(M)$ в любой точке $M(x,\ y,\ z)$ и в точке M_0:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=10xyz-7y^2z+5yz^2,\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}=10-7+5=8,$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y} = 5x^2z - 14xyz + 5xz^2, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 5 - 14 + 5 = -4,$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = 5x^2y - 7xy^2 + 10xyz, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 5 - 7 + 10 = 8.$$

Тогда в точке $M_0(1, 1, 1)$ имеем $\mathbf{grad}\, u(M_0) = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$. Наибольшая скорость изменения поля в точке M_0 достигается в направлении $\mathbf{grad}\, u(M_0)$ и численно равна $|\mathbf{grad}\, u(M_0)|$:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial\, \mathbf{grad}\, u} = \max \frac{\partial u(M_0)}{\partial \mathbf{s}} = |\mathbf{grad}\, u(M_0)| =$$

$$= \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 8^2} = 12. \blacktriangleleft$$

3. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\mathbf{a}(M) = xy^2z^2\mathbf{i} + x^2yz^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ в точке $M_0(2, -1, 1)$.

▶ Наибольшая плотность циркуляции векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в данной точке M_0 достигается в направлении ротора и численно равна $|\mathbf{rot}\, \mathbf{a}(M_0)|$. Находим:

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(xz - 2x^2yz) - \mathbf{j}(yz - 2xy^2z),$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{a}(M_0) = 10\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \quad |\mathbf{rot}\, \mathbf{a}(M_0)| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}. \blacktriangleleft$$

4. Выяснить, является ли векторное поле $\mathbf{a}(M) = (y + z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$ соленоидальным.

▶ Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ — соленоидальное, если в каждой его точке $\mathbf{div}\, \mathbf{a}(M) = 0$. Находим

$$\mathbf{div}\, \mathbf{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(z + y) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-xz) = 0 + x - x = 0. \blacktriangleleft$$