10.1.19. Пусть $\arg z = \frac{3}{7}\pi$. Чему равен $\arg \bar{z}$?

10.1.20. Какое из чисел больше: $z = 2 - i$ или $z = -2 + i$?

10.1.21. Каковы условия равенства комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме?

§ 2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданные *в алгебраической форме*, определяются следующими равенствами:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{2.1}$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{2.2}$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2), \tag{2.3}$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{2.4}$$

$$(\text{при } z_2 \neq 0).$$

Из равенства (2.2) следует, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}, \tag{2.5}$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Из равенства (2.3) следует, что

$$i^2 = -1.$$

При умножении комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме* их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Отсюда следует *формула Муавра для возведения комплексных чисел* в натуральную степень:

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{2.6}$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big),$$

$$\text{где } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, n-1. \tag{2.7}$$

10.2.1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

❍ Используя формулы (2.1)–(2.4), находим:

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i;$$
$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i;$$
$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 4 + 3i;$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{5i}{5} = i.$$ ●

10.2.2. Найти $(-1 - i\sqrt{3})^{15}$.

❍ Запишем число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме: $|z| = r = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg z = \varphi = \operatorname{tg}\frac{(-\sqrt{3})}{(-1)} - \pi = -\frac{2}{3}\pi$, т. е.

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right).$$

По формуле Муавра (2.6) имеем

$$(-1 - i\sqrt{3})^{15} = \left[2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right]^{15} =$$
$$= 2^{15} \cdot (\cos(-10\pi) + i\sin(-10\pi)) = 2^{15}(1 + 0i) = 2^{15} = 32768.$$

●

10.2.3. Вычислить:
а) $(1 - i) \cdot (-3 + 2i)$;
б) $\frac{1 + 2i}{3 - i} + (1 - i)^2$.

10.2.4. Вычислить:
а) $\frac{2 + 3i}{4 - 2i} + \frac{1 - 3i}{2i}$;
б) $i^2 + i^3 + i^4 + i^5$.

10.2.5. Найти:
а) $\left(\frac{i^{16} + 3}{i^6 + 3}\right)^5$;
б) $(1 + i)^{10}$.

10.2.6. Найти:
а) $\frac{1 + i}{(\sqrt{3} + i)(1 + i\sqrt{3})}$;
б) $(-1 + i)^5$.

10.2.7. Доказать, что:
а) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

10.2.8. Доказать, что:
а) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$;
б) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

10.2.9. Вычислить: $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots i^{100}$.

10.2.10. Вычислить: $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{54} + i^{64} + i^{74} + i^{84}$.

10.2.11. Решить уравнение $z^5 + 32 = 0$ на множестве комплексных чисел.

❍ Перепишем уравнение в виде $z = \sqrt[5]{-32}$. Число (-32) представим в тригонометрической форме:

$$-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi).$$

По формуле (2.7) находим

$$z = \sqrt[5]{32(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, 4$, получим

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) \approx 1{,}6180 + 1{,}1756 \cdot i,$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right) \approx -0{,}6180 + 1{,}9021 \cdot i,$$

$$z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right) \approx -0{,}6180 - 1{,}9021 \cdot i,$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right) \approx 1{,}6180 - 1{,}1756 \cdot i.$$

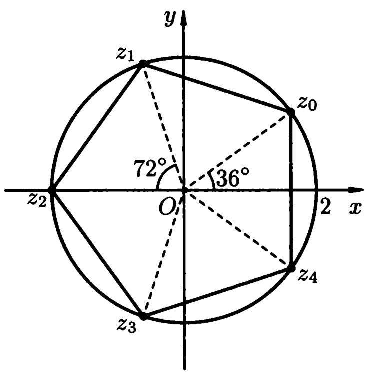

Рис. 115

Найденным корням уравнения соответствуют вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (рис. 115). ●

10.2.12. Найти действительные решения уравнения:

а) $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$;

б) $x + y + ixy = i$.

10.2.13. Найти:

а) действительные решения;

б) комплексные решения

системы уравнений $\begin{cases} (2 + i)x + (2 - i)y = 6, \\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8. \end{cases}$

10.2.14. Вычислить $\dfrac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24}-i\cdot(1+i)^{24}}$.

10.2.15. Вычислить $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

10.2.16. Найти все значения корня $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

10.2.17. Решить уравнение $z^3+1=0$.

10.2.18. Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

а) $\begin{cases} 1\leqslant z\cdot\bar{z}\leqslant 2, \\ -\sqrt{3}\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 0; \end{cases}$

б) $|z-i|=|z+2|$;

в) $\begin{cases} |z-i|<1, \\ \arg z\geqslant \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z+1-i)\leqslant\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

○ а) Так как $z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$, а $\operatorname{Im} z=y$, то данную систему неравенств можно записать в виде $\begin{cases} 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2, \\ -\sqrt{3}\leqslant y\leqslant 0. \end{cases}$

Неравенства $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R=1$ и $R=2$ с центром в начале координат. Неравенства $-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми $y=-\sqrt{3}$ и $y=0$, включая прямые $y=-\sqrt{3}$ и $y=0$. Искомое множество точек z заштриховано на рисунке 116.

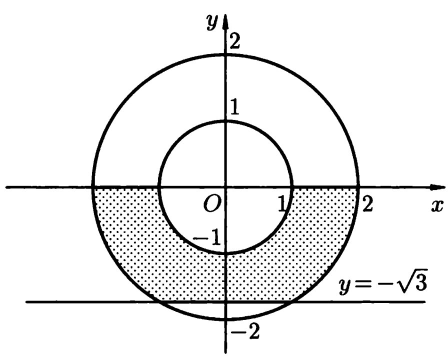

Рис. 116

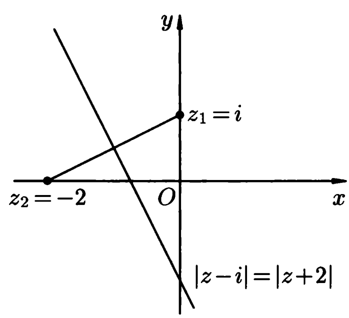

Рис. 117

б) Согласно формуле (2.5), равенству $|z-i|=|z-(-2)|$ удовлетворяет множество точек z, равноудаленных от точек $z_1=i$ и $z_2=-2$. Это множество точек представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z_1 = i$ и $z_2 = -2$ (см. рис. 117).

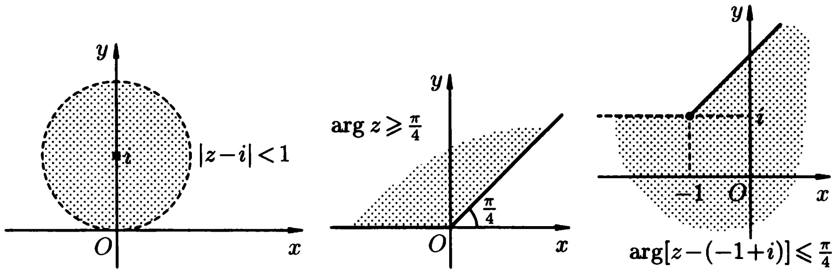

Рис. 118

в) Изобразим на отдельных рисунках множества точек, удовлетворяющих каждому из неравенств условия (см. рис. 118).

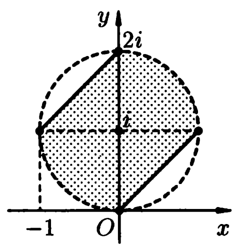

Рис. 119

Находим пересечение трех полученных областей — это и будет искомое множество (выделено на рис. 119). ●

10.2.19. Изобразить на рисунке множество точек z, удовлетворяющих условию $|z-3| = 2 \cdot |z|$.

10.2.20. Изобразить на комплексной плоскости множество точек z, для которых выполняется условие $|3+iz| \leqslant |z|$.

Дополнительные задачи

10.2.21. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если

а) $z = (2-i)^2 \cdot (3+4i)$;

б) $z = i^8 + \dfrac{5+i}{1-3i}$.

10.2.22. Решить уравнения:

а) $z^2 + \bar{z} = 0$;

б) $|z| - 3z = -12i$.

10.2.23. Вычислить:

а) $\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right)^{12}$;

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

10.2.24. Доказать справедливость тождеств:

а) $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$;

б) $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.

Указание. Использовать формулу Муавра: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$.

10.2.25. Найти все значения корня:

а) $\sqrt[3]{-i}$;

б) $\sqrt[4]{8-8\sqrt{3}\cdot i}$;

в) $\sqrt[4]{-16}$;

г) $\sqrt[5]{1+i}$.

10.2.26. Найти расстояние между точками:

а) $1-6i$ и $2i$;

б) $1+4i$ и $3-2i$.

10.2.27. Найти комплексные числа, каждое из которых сопряжено со своим квадратом.

10.2.28. Решить уравнение ($x \in \mathbb{C}$):

а) $x^2-4x+8=0$;

б) $3x^2-x+2=0$.

10.2.29. Выполнить действия:

а) $\dfrac{8(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)}{16(\cos(-50^\circ)+i\sin(-50^\circ))}$;

б) $\sqrt{2}\cdot(1-i)(1+i\sqrt{3})(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

10.2.30. Выполнить действия. Результат предоставить в алгебраической форме:

а) $\left(\sqrt{2}\cdot e^{\frac{2\pi}{9}i}\right)^3$;

б) $3\cdot e^{\frac{\pi}{5}i}\cdot 4e^{\frac{4}{5}\pi i}$.

10.2.31. На плоскости $\mathbb{C}$ нарисовать область, заданную неравенствами:

а) $|z+i|<1,\ |z+1|\geqslant 1$;

б) $|z-2-i|\geqslant 1,\ 1\leqslant \operatorname{Re} z<3,\ 0<\operatorname{Im} z\leqslant 3$;

в) $|z|<2,\ \operatorname{Re} z\geqslant 1,\ \arg z<\frac{\pi}{4}$.

10.2.32. Дано: $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}(1-i)}-\dfrac{1}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$. Найти: $\bar{z}$ и $\dfrac{1}{z}$.

10.2.33. Доказать формулы Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{2.8}$$

10.2.34. Используя формулы Эйлера, выразить через косинусы и синусы кратных дуг функции:

а) $\cos^4 x$;

б) $\sin^2 x$.

10.2.35. Решить уравнения:

а) $z^2 - (2i - 5)z + 5 - 5i = 0$;

б) $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

10.2.36. Доказать, что последовательность чисел $\{z_n\}$, где $z_n = \cos nx + i \sin nx$ есть геометрическая прогрессия. Найти ее знаменатель.

10.2.37. Доказать, что если $|z| = 1$, то $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

10.2.38. Из всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - \sqrt{3} + i| \leqslant 1$ найти число, имеющее наименьшее значение главного аргумента.

10.2.39. Найти число с наибольшим модулем среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z + 3 - 4i| = 3$.

10.2.40. Найти $(1 + \sin\varphi + i\cos\varphi)^{16}$.

10.2.41. Найти модуль и аргумент комплексного числа z, если:

а) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$;

б) $z = \dfrac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})^4}{\left(\sin\frac{3\pi}{10} + i\cos\frac{7\pi}{10}\right)^2}$;

в) $z = \left(1 - \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 \cdot \left(1 - i\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{11}{10}\pi\right)^3$.

10.2.42. Пользуясь формулой Муавра (см. (2.6)), выразить $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

10.2.43. Найти сумму:

а) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$; $(n \in \mathbb{N})$;

б) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$; $(n \in \mathbb{N})$.

Указание. Использовать формулы Эйлера (см. (2.8)).

10.2.44. Решить уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$;

б) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$;

в) $|\bar{z}| - 2z = 2i - 1$.

10.2.45. При каких действительных значениях x и y числа $z_1 = x^2 + 4y - yi$ и $z_2 = 4 + y - \frac{2}{i} - x^2 \cdot i$ будут сопряженными?

10.2.46. Зная точку z, на комплексной плоскости построить точку:

а) $z' = z - 3$;

б) $z' = iz$;

в) $z' = z + (2 - i)$.

10.2.47. Сколько и какие значения имеет произведение $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4}$?

10.2.48. При каком условии квадрат комплексного числа $x+iy$ является чисто мнимым числом?

10.2.49. Указать на плоскости $\mathbb{C}$ точки z, для которых:

а) $\bar{z} = \frac{1}{z}$;

б) $\bar{z} = -\frac{1}{z}$.

10.2.50. Вычислить:

а) $|e^{i\varphi}|$;

б) $|\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi|$.

10.2.51. Может ли сумма квадратов двух комплексных чисел быть отрицательной?

10.2.52. Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z в результате умножения этого числа на:

а) 2;

б) $2i$;

в) $-2i$.

10.2.53. Вычислить:

а) $\sqrt{1}$;

б) i^{2001}.

10.2.54. Нарисовать на плоскости $\mathbb{C}$ область, заданную неравенствами:

а) $|z+i| \leqslant 2,\ \operatorname{Re} z > \sqrt{2}$;

б) $|\operatorname{Re} z| \leqslant 2,\ |\operatorname{Im} z| < 1$;

в) $|z-1| < 1,\ \arg z \leqslant \frac{\pi}{4},\ \arg(z-1) > \frac{\pi}{4}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Вычислить:

а) $\dfrac{1+3i}{-2+i} \cdot (-2i) + 1$;

б) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{160}$.

2. Найти модуль и аргумент комплексного числа z:

а) $z = (-5+i) \cdot (-5-i)$;

б) $z = \left(\dfrac{4+3i}{5}\right)^{10}$.

3. Решить уравнение:

а) $z^2 - 8iz - 15 = 0$;

б) $z^3 + 8i = 0$.

4. Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z, удовлетворяющих условию:
а) $|z-2|-|1-2\bar{z}|=0$;
б) $|z-1+i|\geqslant 1$, $\operatorname{Re} z<1$, $\operatorname{Im} z\leqslant -1$.

5. Найти число с наименьшим аргументом среди чисел z, удовлетворяющих условию: $|z-8|=4$.

Вариант 2

1. Вычислить:

а) $1-i^5+i^{10}-i^{15}+\cdots+i^{50}$;

б) $\dfrac{3+4i}{i}+\dfrac{4-i}{3+2i}$.

2. Вычислить $(z_1\cdot z_2)^{10}$, если $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=\frac{1}{4}(\sin 30^\circ+i\cos 30^\circ)$.

3. Решить уравнение:

а) $z^2-4z+20=0$;

б) $\bar{z}\cdot|z|=4-3i$.

4. Изобразить на комплексной области множества всех точек z, удовлетворяющих условию:
а) $\operatorname{Re}(1+z)=|z|$;
б) $|z-1-i|<1$, $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{4}$.

5. Где расположены точки $1+2z$, для которых $|z|=1$?

Вариант 3

1. Найти:

а) $\dfrac{(2+3i)(5-i)}{2+i}$;

б) $(2i-1)^4-(2i+1)^4$.

2. Представить в тригонометрической и показательной формах числа:
а) $z=1-\sqrt{3}$;
б) $z=-2-4i$;
в) $z=3\left(\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right)$;

3. Решить уравнение:

а) $z^2-z+5=0$;

б) $z^6=\frac{1}{i}$.

4. Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z, удовлетворяющих условию:

а) $\begin{cases} 1 \leqslant |z+2i| \leqslant 3, \\ -\frac{2}{1} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{5}{2}. \end{cases}$

б) $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{2}$.

5. Вычислить: $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n-\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Вариант 4

1. Вычислить:

а) $(1 = 2i)^3 - \frac{4i}{4-3i}$;

б) $i^3 + i^{13} + i^{23} + \cdots + i^{53}$.

2. Представить в тригонометрической и показательной формах числа:
а) $z = -17{,}2i$;
б) $z = -0{,}3 + 2{,}4i$;
в) $z = -\operatorname{ctg}\alpha + i$ $(0 < \alpha < \pi)$.

3. Решить уравнения:
а) $z^2 + 8z + 41 = 0$;
б) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

4. Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z, удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$;

б) $|z-2i| \leqslant \left|\sin\frac{3}{2} - i\cos\frac{3}{2}\right|$.

5. Найти число с наименьшим модулем среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию: $|2-2iz| = |z-4|$.

❑