Глава 10. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

$\Rrightarrow$ *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, первое из которых x называется его *действительной частью*, а второе число y — *мнимой частью*. Обозначение: $z = x+iy$.Символ i называется *мнимой единицей*.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*, если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — мнимой частью, $y = \operatorname{Im} z$.

$\Rrightarrow$ Два комплексных числа $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2 = x_2+iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части называются *сопряженными*.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ *можно изобразить точкой* $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот.

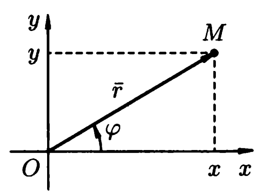

Рис. 112

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают $\mathbb{C}$). Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой*.

Комплексное число $z = x+iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$.

Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z (см. рис. 112), называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1.1)$$

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm, 2, \ldots$, где $\arg z = \varphi$ — *главное значение аргумента,* заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, то есть $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

Замечание. В качестве значения аргумента можно брать величину принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$.

⇛ Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Запись числа z в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.2}$$

называется *тригонометрической формой.*

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент z можно найти, используя формулу $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{при } x > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0,\ y > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

⇛ Запись числа z в виде

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{или} \quad z = |z|e^{i\arg z} \tag{1.4}$$

называют *показательной формой* (или экспоненциальной) комплексного числа.

10.1.1. Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 2 + 2i$; **б)** $z = -1 + i\sqrt{3}$;

в) $z = -5i$; **г)** $z = -3 - 2i$;

д) $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

○ Используем формулы (1.1)–(1.4).

а) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$. Здесь $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, $|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит,

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

б) Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi$. Значит,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi}.$$

в) Имеем: $r = \sqrt{0+25} = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Значит,

$$-5i = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

г) Имеем: $r = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{-3}\right) - \pi = \operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi$. Значит,

$$-3 - 2i = \sqrt{13}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt{13}e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right)}.$$

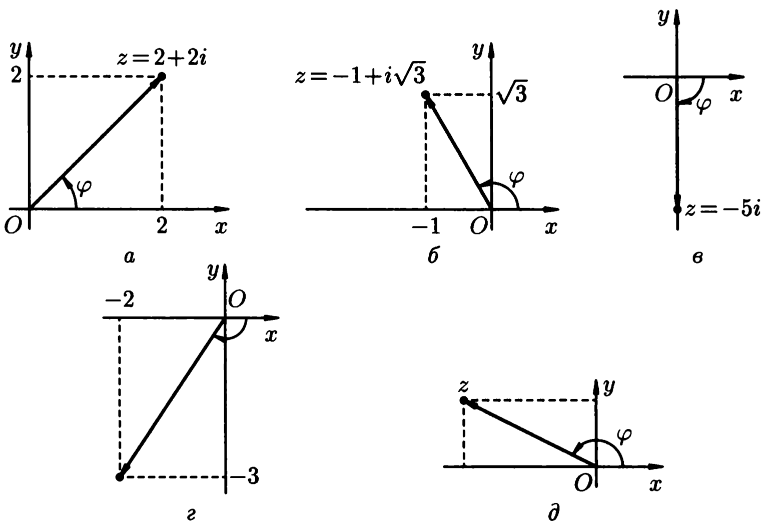

Рис. 113

д) Запись $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа (см. формулу (1.2)).

Перепишем z в виде $z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Надо найти такой угол φ, что $\cos\varphi = -\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{5}$. Таким углом является $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$, т.е. $\varphi = \frac{4}{5}\pi$. Значит,

$$z = 3\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right) = 3\cdot e^{i\cdot\frac{4}{5}\pi}.$$

Изображения чисел представлены на рис. 113. ●

10.1.2. Построить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ векторы, соответствующие комплексным числам z. Найти $|z|$ и $\arg z$:

а) $z = -5$;
б) $z = 2{,}3i$;
в) $z = -1 - i$;
г) $z = 3 - i$.

10.1.3. Дана точка $z = 2 + 3i$. Построить на этой же плоскости точки: $-2 + 3i$, $-2 - 3i$, $2 - 3i$, $2 + 0i$, $0 + 3i$, $-2 + 0i$, $0 - 3i$.

10.1.4. Представить в алгебраической форме числа:

а) $2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$;
б) $-\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

10.1.5. Даны комплексные числа

а) $z = 5 - 5i$;
б) $z = 2$.

Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

10.1.6. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $2 + 4i$;
б) $\sqrt{3} - i$;
в) 2001;
г) $2\cos\frac{\pi}{3} - 2i\sin\frac{\pi}{3}$.

10.1.7. Представить в показательной форме комплексные числа:

а) $12i$;
б) $1 - \sqrt{3}$;
в) $-4 - 3i$;
г) $\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$.

10.1.8. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 2$;
б) $\arg z = \frac{\pi}{3}$;
в) $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1{,}5$;
г) $\operatorname{Re} z > 1$;
д) $\begin{cases} |z| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3}{4}\pi. \end{cases}$

◐ а) Согласно формуле (1.1), имеем $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, т. е. $x^2 + y^2 = 4$. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z| = 2$, т.е. $x^2 + y^2 = 4$ представляет собой окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.

б) Точки z лежат на луче, выходящем из точки $O(0;0)$ под углом $\frac{\pi}{3}$ к действительной оси.

в) Неравенство $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1{,}5$ можно переписать так $0 \leqslant \leqslant y < 1{,}5$.

г) Условие $\operatorname{Re} z > 1$ или $x > 1$ определяет множество всех точек, расположенных справа от прямой $x = 1$.

д) Множества точек, расположенных внутри и на границе круга $|z| \leqslant 1$, заключенных между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ удовлетворяют условию $\begin{cases} |z| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

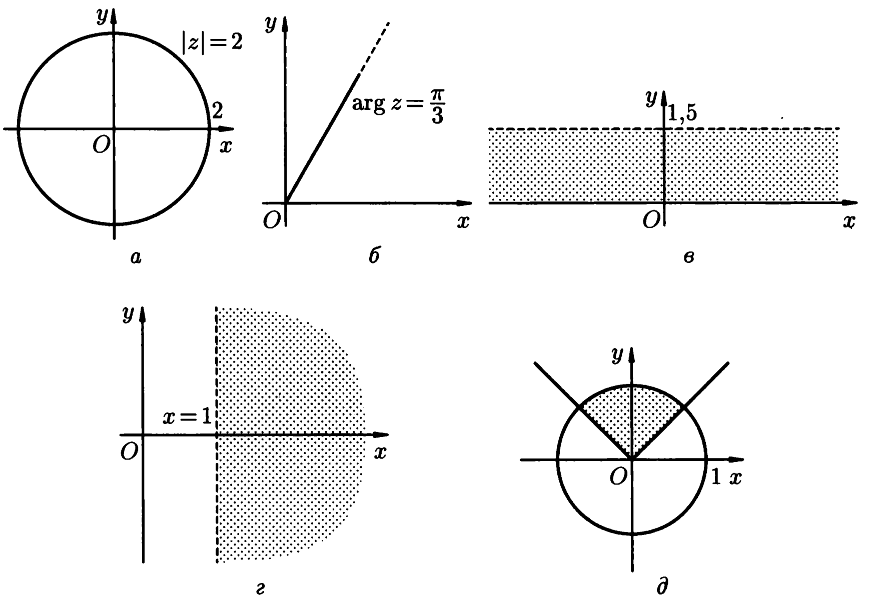

Рис. 114

Множества точек а)–д) изображены на рис. 114. ●

10.1.9. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $|z| > 2$;

б) $|\operatorname{Im} z| < 2$;

в) $-\frac{\pi}{4} < \arg z \leqslant 0$.

10.1.10. Указать на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям:

а) $1 \leqslant |z| \leqslant 4$, $|\operatorname{Re} z| \geqslant \sqrt{2}$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant 0{,}7$;

б) $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$, $|z| > 0{,}2$;

в) $\arg z = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Дополнительные задачи

10.1.11. Найти все значения аргумента комплексного числа:

а) -6;

б) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

10.1.12. Найти главное значение аргумента комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, если:

а) $\sin\varphi = -0{,}5$;

б) $\sin\varphi = 0{,}5$, $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.1.13. Представить в тригонометрической и алгебраической формах числа:

а) $5e^{-\frac{\pi}{2}i}$;

б) $-2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$.

10.1.14. Представить в тригонометрической и показательной формах числа:

а) $-3+4i$;

б) $3(\cos 10^\circ - i\sin 10^\circ)$;

в) $1 + i\cdot\operatorname{tg} 1$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

10.1.15. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $1 + \cos 22^\circ + i\sin 22^\circ$;

б) $\sin\varphi + i\cos\varphi$;

в) $1 - i\operatorname{tg}\alpha$, если $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

г) $5\left(\cos\frac{4}{3}\pi - i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$.

10.1.16. Найти наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если $z = 2\sin\alpha + i\cos\alpha$.

10.1.17. При каких значениях x и y комплексные числа $z = x + 2i$ и $z = 4 + \sqrt{3}yi$.

а) равны?

б) сопряжены?

10.1.18. Могут ли быть сопряженными: два действительных числа? два чисто мнимых? действительное и мнимое число?